Estudo ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

METODOLOGIA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: COMPLEMENTARIDADE OTTEANA BASEADA NA SEMIÓTICA

RESEARCH METHODOLOGY IN MATHEMATICS EDUCATION: OTTEAN COMPLEMENTARITY BASED ON SEMIOTICS

Humberto de Assis Clímaco[1]
Jacqueline Borges de Paula[2]
Geslane Fiqueiredo da Silva Santana[3]

Resumo: Neste artigo, a "Complementaridade otteana fundamentada na Semiótica" é apresentada como uma metodologia de pesquisa em Educação Matemática. Os fundamentos filosóficos e epistemológicos que embasam essa metodologia são explorados, destacando-se seu papel na investigação educacional. São demonstradas diferentes abordagens práticas da mencionada Complementaridade, por meio de alguns exemplos de pesquisas que a utilizaram como base. Encerra-se o relato deste estudo, expondo as principais conclusões: a importância de abordar o caráter social e histórico da Matemática para compreender a própria natureza da disciplina Matemática, a compreensão de que a interdisciplinaridade é um fator central para a fundamentação da Educação Matemática e o entendimento de que adotar uma abordagem metodológica de pesquisa, sustentada na abordagem da Complementaridade otteana, exige que o pesquisador em Educação Matemática assuma o propósito de construção e constituição de uma "sempre renovada" postura investigativa, a cada problema e objeto que se pretende investigar.

Palavras-chave: Metodologia de Pesquisa; Semiótica; Complementaridade; Educação Matemática.

Abstract: This paper aims at presenting Ottean Complementarity based on Semiotics as a research methodology in Mathematics Education. Both philosophical and epistemological patterns that support this methodology highlight its role in educational research. Different practical approaches to complementarity are pointed out, through some examples of research that used it as a basis. The report of this study focuses at conclusions such as: the importance of approaching the social and historical character of Mathematics to understand the very nature of the Mathematics, as well as the understanding that interdisciplinarity is a central factor for the foundation of Mathematics Education and the understanding that adopting a methodological approach to research, supported by the Ottean complementarity approach, requires that the researcher in Mathematics Education assume the purpose of constructing and constituting an "always renewed" investigative stance, for each problem and object intended to be investigated.

Keywords: Research Methodology; Semiotics; Complementarity; Mathematics Education.

[1] Doutor em Educação Matemática pelo Programa de Pós-graduação da Universidade Federal de Goiás (UFG). Professor e Pesquisador na Universidade Federal de Goiás (UFG), Goiânia, Goiás, Brasil. E-mail: humberto_climaco@ufg.br
[2] Doutora em Educação em Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Educação (IE/UFMT). Professora e Pesquisadora na Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), Cuiabá, Mato Grosso, Brasil. E-mail: jaqueline.paula@ufmt.br
[3] Doutora em Educação em Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM/REAMEC/UFMT). Professora e Pesquisadora na Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), Sinop, Mato Grosso, Brasil. E-mail: geslanef@hotmail.com

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

1 Introdução

O objetivo deste artigo consiste em apresentar uma metodologia para pesquisas em Educação Matemática, baseada na complementaridade otteana que se fundamenta em uma perspectiva semiótica, situada no quadro do pensamento e teoria em desenvolvimento sobre complementaridade presente na pesquisa em Educação Matemática, elaborada por Michael Friedrich Otte (1991, 1993, 2003, 2018, 2020).

Realizamos nossa reflexão a partir da pergunta norteadora: "Em que consiste a metodologia de pesquisa fundamentada na abordagem da Complementaridade otteana?". Para a realização das investigações, reflexões e escrita do presente trabalho, utilizamos a própria noção de complementaridade otteana.

O artigo começa pela exposição de uma síntese da trajetória do professor Michael F. Otte, buscando destacar como, nesse percurso de vida dedicada à Educação Matemática, sua teoria da Complementaridade foi se delineando. Na sequência, apresenta a metodologia que caracteriza a Complementaridade otteana, baseada na perspectiva semiótica de Peirce, ao tempo em que são destacados os principais aspectos dos alicerces filosóficos e epistemológicos de Semiótica e de Complementaridade, que alimentaram e direcionaram o pensamento de Otte no sentido da elaboração de sua heurística metodológica.

Em seguida, fundamentados no pensamento otteano, delineamos interpretações sobre relações de complementaridade, como as que seguem: a Complementaridade no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, a Complementaridade em estudos de História da Matemática e a Complementaridade em estudos interdisciplinares. Por fim, há alguns exemplos de pesquisas realizadas com base na abordagem da Complementaridade otteana.

2 Michael Friedrich Otte e a noção de Complementaridade

Neste tópico, ao tempo em que é historiada a trajetória acadêmica de Michael F. Otte, procura-se mostrar sua relação com o desenvolvimento de seus estudos e trabalho delineados pela Semiótica. Inicia-se com um breve relato biográfico, com destaque para o período de sua vida acadêmica em que, como diretor do Instituto de Didática da Matemática de Bielefeld, tornou-se um dos fundadores da disciplina Educação Matemática. Em seguida, é mostrado como sua busca por fundamentar a disciplina Educação Matemática o levou a desenvolver a concepção de complementaridade baseada

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

na Semiótica, cujas bases se constroem, essencialmente, sobre o alicerce filosófico e epistemológico da Semiótica em Charles Sanders Peirce (1839-1914), mas que deita suas raízes mais profundas no construtivismo epistemológico de Immanuel Kant (1724-1804).

O professor Michael Friedrich Otte tem uma trajetória inicial semelhante à de outros fundadores da Educação Matemática. Nascido em 1938, fez mestrado em Matemática pela Universidade de Erlangen em 1963 e dois doutorados também na mesma área pela Universidade de Goettingen, em 1967, e pela Universidade de Münster, em 1972. No ano de 1973, Otte foi convidado, em razão de ter cursado disciplinas eletivas de Filosofia, Literatura Alemã e Psicologia, para contribuir com as soluções que a universidade estava procurando para o problema da existência, na instituição, de inúmeros alunos com muitos anos de atraso em seus cursos, em razão de reprovação ou abandono de disciplinas.

A solução original encontrada por Otte, muito menos comum à época, foi a de criar grupos em que se trabalhava a Matemática Elementar de um ponto de vista superior, em nova perspectiva e nova forma, estimulando a cooperação entre os estudantes e apresentando a eles objetivos claros. Tal iniciativa teve um sucesso considerável para as metas que a instituição havia estabelecido. (Hoffmann; Lenhard; Seeger, 2005).

O reitor da Universidade de Bielefeld (Alemanha), tendo tomado conhecimento dessa experiência e da capacidade de Otte para organizar e coordenar equipes, convidou-o para ser um dos coordenadores do Instituto de Didática da Matemática (IDM) que estava surgindo, em 1973, em Bielefeld. Os demais coordenadores eram Heinrich Bauersfeld, que trabalhava com Teoria Curricular e ensino de Matemática na Escola Primária; e Hans-Georg Steiner, pesquisador de Didática da escola secundária do Ginásio. A iniciativa de criação de tal instituto, que se consolidou em 1973, deve-se à Fundação Volkswagen, visando “[...] estabelecer um instituto de pesquisa central na Alemanha para alcançar uma compreensão científica mais profunda do desastroso fracasso da abordagem da matemática moderna nas escolas primárias da Alemanha” (Hoffmann; Lenhard; Seeger, 2005, p. 1, tradução nossa).

Havia três frentes de trabalho gerais no IDM, lideradas por professor Michael Otte: primeiro, atividades com professores da Educação Básica, que culminavam na realização de seminários no IDM com diretores de escola, além de atividades regionais coordenadas por tais diretores, chamada de projeto *Entwicklung praxisorientierter Ausbildungs- und Studienmaterialien für Mathematiklehrer der Sekundarstufe* (Desenvolvimento de materiais de formação e estudo orientados para a prática para

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

professores de Matemática do nível secundário, conhecido como EPAS); em segundo, os *workshops* com os alunos de doutorado; e, por fim, em terceiro, os seminários internacionais, chamados de Basic Components of Mathematics Education for Teachers (Componentes Básicos da Educação Matemática para professores, conhecido como BACOMET)[4], que visavam dialogar com educadores matemáticos de outros países e verificar o que havia em comum entre eles na Educação Matemática.

Todos esses esforços eram partes constitutivas de um projeto único que tinha um duplo objetivo: de um lado, ajudar a formar uma geração de educadores matemáticos em escala mundial, em colaboração com profissionais de outros países; e, de outro, a necessidade de criar os fundamentos da nova ciência, uma teoria específica para a Educação Matemática que servisse de referencial teórico para ela.

Os *workshops*, em particular, constituíram-se em espaço privilegiado para dar início à realização dos dois objetivos, pois eles tanto constituíram a base para a realização de pesquisas que visavam encontrar uma fundamentação teórica para a Educação Matemática, quanto se tornaram referência mundial na formação de uma geração de educadores matemáticos em vários países, onde não havia tais profissionais ou programa semelhante.

Os primeiros temas orientados por Otte e apresentados no *workshop* foram relativos à Matemática propriamente dita e pretendiam abrir perspectivas a novas abordagens sobre ela, visando extrair a Matemática de "[...] sua natureza alienada adquirida, por assim dizer, inadvertidamente, pela predominância de uma cultura linguística, e por certa forma de matemática pura em si e voltada para si própria" (Hoffmann; Lenhard; Seeger, 2005, p. 361-378, tradução nossa).

Na tentativa de identificar ideias fundamentais, princípios norteadores e problemas essenciais da Educação Matemática,

> Michael Otte criou uma imagem completamente nova e incomum do território da ciência e das relações que as disciplinas têm entre si e com a disciplina recentemente estabelecida educação matemática. Ele insistiu em que a educação matemática não pode sobreviver sem relações vivas com as *Bezugsdisziplinen*,[5] como sociologia, educação, história, psicologia e assim por diante (Hoffmann; Lenhard; Seeger, 2005, p. 4, tradução nossa).

[4] Pelo BACOMET, passaram Guy Brousseau e outros grandes personagens que fazem parte do grupo de fundadores da Educação Matemática enquanto disciplina.
[5] Literalmente, *Bezugsdisziplinen* significa "disciplinas de referência". Otte refere-se às disciplinas de base, que contribuíram para fundamentar a Educação Matemática.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

Nessa direção, a obra de Michael Otte pode ser considerada como uma busca por responder positivamente à conhecida citação de René Thom (1973, p. 204): “de fato, queira-se ou não, toda educação matemática baseia-se numa filosofia da matemática, mesmo que seja de forma pouco coerente”. Compreendendo a importância e relevância dos fundamentos filosóficos da Matemática para o processo de ensino e aprendizagem, visto que os “[...] problemas de ensino devem ser resolvidos do ponto de vista dos fundamentos”, Otte e sua equipe de pesquisadores assumiram o desafio de fundamentar a nova disciplina, a Educação Matemática.

Assim, Otte foi um precursor da Complementaridade como metodologia de pesquisa e investigação em Educação Matemática. Seu livro *Das Formale, das Soziale und das Subjektive: eine einführung in die Philosophie und Didaktik der Mathematik* (Otte, 1991), publicado inicialmente em alemão e, no Brasil, traduzido por colaboradores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Câmpus de Rio Claro, da UNESP, e publicado pela editora UNESP, intitulado *O Formal, o Social e o Subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da matemática* (Otte, 1993), é um marco nessa área. Nele, Otte apresenta a complementaridade entre meio e objeto da seguinte forma:

> [...] trata-se efetivamente de uma verdadeira complementaridade, e não de uma mera dualidade, porque nenhum dos dois elementos, meio e objeto, pode ser determinado sem o outro, apesar de eles desempenharem, num determinado momento de certo ato epistemológico individual, um papel complementarmente assimétrico. Pela expressão ‘meio do conhecimento’ designamos qualquer coisa que produz uma intermediação entre o sujeito e o objeto do conhecimento. De fato, aquilo que se entende normalmente por meio, como meios linguísticos e as ferramentas e instrumento experimental, só se tornam efetivamente um meio quando eles produzem relações do sujeito para um objeto. Se isto não ocorre, pense-se por exemplo numa língua que não se domina, então, o que ocorre é mais uma barreira ou resistência. Um meio sem objeto constitui-se para o sujeito apenas num horizonte limitado. Os meios do conhecimento são de fato para serem diferenciados dos objetos do conhecimento, mas não para serem definidos sem o seu concurso (Otte, 1993, p. 224).

Otte (1993) explica que a primeira expressão filosófica sobre a ideia da Complementaridade encontra-se na epistemologia de Immanuel Kant, que apresenta um resumo do desenvolvimento da ciência em termos epistemológicos, na obra *Crítica da Razão Pura*[6], na qual reflete sobre os defeitos e contradições da teoria do conhecimento

[6] Esta obra é citada, no presente artigo, segundo a padronização internacional, que define que não se deva usar ano ou paginação de publicações recentes e, sim, as iniciais da obra em questão e a numeração internacional. A tradução que foi utilizada corresponde à considerada melhor em português, sendo a única que aparece nas referências (ver, por exemplo, do Dicionário Kant, de Caygill). *A Crítica da Razão Pura* tem uma particularidade relacionada a que duas edições, feitas pelo próprio Kant, em 1781 e em 1787, são utilizadas como padrão; uma tem a numeração relacionada com a letra A e a outra com a letra B.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

de racionalistas, como o alemão Gotfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e de empiristas, como o escocês David Hume (1721-1776). Ambas as correntes filosóficas concordavam que a formação do conhecimento surgia do confronto entre o sujeito e o objeto, ou seja, concebiam que havia uma separação entre sujeito e mundo. Diante desses resultados, Kant definiu que o conhecimento humano provém de duas fontes, que são intuições e conceitos, por ele explicados como segue:

> [...] O nosso conhecimento provém de duas fontes fundamentais do espírito, das quais a primeira consiste em receber as representações (a receptividade das impressões) e a segunda é a capacidade de conhecer um objeto mediante estas representações (espontaneidade dos conceitos); pela primeira é-nos dado um objeto; pela segunda é pensado em relação com aquela representação (como simples determinação do espírito). Intuição e conceitos constituem, pois, os elementos de todo o nosso conhecimento, de tal modo que nem conceitos sem intuição que de qualquer modo lhes corresponda, nem uma intuição sem conceitos podem dar um conhecimento [...]. Sem a sensibilidade, nenhum objeto nos seria dado; sem o entendimento, nenhum seria pensado. Pensamentos sem conteúdo são vazios; intuições sem conceitos são cegas (Kant, A 50-51, B 75-76).

Do ponto de vista da complementaridade, a filosofia de Kant pode ser vista como uma elaboração original e que, em Kant, resulta de uma confluência entre o racionalismo e o empirismo, o que significa que ela trilha em uma via média entre tais tendências filosóficas, e é por isso que ela afirma que os objetos existem, mas que sua existência depende da atividade cognitiva do sujeito. A afirmação expressa sobre a existência de duas fontes do conhecimento por meio das quais os conceitos se formam, a saber, a razão (intuição pura) e a sensibilidade (intuição empírica), exprime as primeiras noções sobre a complementaridade na abordagem e teoria otteana.

Em Kant, tanto as intuições quanto os conceitos são elementos distintos que participam do conhecimento humano, envoltos em uma relação complementar: um precisa do outro para que o sujeito cognoscente possa obter conhecimento. Sobretudo, intuições e conceitos não podem ser totalmente separados no processo de aquisição do conhecimento (Otte, 1998). Tal relação de dependência implica em que a obtenção do conhecimento envolve também subjetividade humana; na atribuição desse papel ímpar à subjetividade, reside, talvez, aquilo que há de mais original na filosofia kantiana e que teve forte influência à assumpção de uma perspectiva semiótica à complementaridade otteana.

É sob a base da semiótica peirceana, então, que Otte estuda e amplia a complementaridade para outras áreas, como a Educação Matemática e o Ensino de Matemática (Santana; Wielewski; Barros, 2020). Hoffmann, Lenhard e Seeger (2005)

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

definem a complementaridade de Otte — tal como foi formulada nesta obra — como uma espécie de heurística metodológica. Ilustram o conhecido exemplo da dialética, como a coexistência e co-ocorrência de contradições, e agregam a interpretação de Copenhagen da mecânica quântica por Niels Henrik David Bohr (1885-1962), na qual se podem encontrar descrições de processos básicos nos quais a dualidade onda-partícula seja uma propriedade inerente da natureza, ou seja, ondas comportando-se como partículas, e partículas como ondas.

Para Otte, a presença dessas formas de coexistências duais reforça seu entendimento da complementaridade: "Ambas as descrições são necessárias; no entanto, elas excluem umas as outras simultaneamente" (Hoffmann; Lenhard; Seeger, 2005, p. 4, tradução nossa). Otte aplicou diversas formas de complementaridade em grande quantidade de variações. É o caso da forma como ele descreve a Matemática, na obra mencionada, situando-a como um paradigma que define e usa a complementaridade do formal/algoritmo e do histórico/cultural.

> É importante notar que a complementaridade heurística não é satisfeita ao eliminar contradições. Para Michael Otte, ao contrário, a posição da complementaridade frequentemente parece indicar que um grau suficiente de precisão analítica foi realizado. Segue-se disso que foi alcançado um entendimento de fundamentos que não é guiado pela ideia de eliminar contradições, mas sim pela busca por encontrar uma síntese que abranja forças, entidades ou conceitos realmente contraditórios (Hoffmann; Lenhard; Seeger, 2005, p. 4, tradução nossa).

Alguns anos após a publicação de *O Formal, o Social e o Subjetivo*, que sistematizou o conhecimento dos fundamentos da Educação Matemática obtido nesses aproximadamente vinte anos de trabalho, Otte descobre novos caminhos para a Complementaridade, ao retomar as leituras sobre a Semiótica de Charles Sanders Peirce e lançar um novo olhar sobre a obra do filósofo estadunidense, estabelecendo relações mais próximas entre a Semiótica e a sua teoria sobre Complementaridade.

Um aspecto importante da contribuição de Peirce (CP 8.361)[7] para a Educação Matemática, de acordo com Otte *et al*. (2019), é que ele rompe com uma interpretação dualista e apoia-se em relações triádicas, como a relação "objeto-signo-interpretante", em que um signo ou *representâmen* é aquilo que, em determinado aspecto ou modo, representa algo para alguém, dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa~~,~~ um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. O signo que foi assim criado

[7] Para as referências a essa obra, utilizamos o sistema internacional de indicação das iniciais, CP (Charles Peirce), seguidas do número do volume e do livro.

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

denomina-se interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa — o seu objeto —, mas não o representa em todos os seus aspectos, e sim com referência a um tipo de ideia denominada fundamento do *representâmen*.

A capacidade que a Semiótica tem de evitar a necessidade de escolhas unívocas entre dualidades foi alvo de uma investigação profunda da parte de Michael F. Otte, que buscou adaptá-la ao contexto da Educação Matemática e, assim, superar dicotomias das quais, muitas vezes, a Educação Matemática é vítima: (1) ora os matemáticos afirmam que basta saber Matemática para ser bom professor; (2) ora alguns educadores matemáticos acreditam que a redução ao contexto (social, histórico ou psicológico) é suficiente para que os conceitos matemáticos possam fazer sentido para os estudantes.

A complementaridade da perspectiva semiótica em Otte imprime, à interpretação, o exercício hermenêutico para analisar (ou estar presente no movimento de análise), de modo inseparável, a dimensão tanto formal, como em (1), da constituição do conhecimento matemático, quanto a social e subjetiva, que se mostra em (2).

Antes de tudo, como se mostra adiante, ao refletir sobre questões relacionadas à Educação Matemática, deve-se destacar que a Semiótica permitiu recolocar os problemas dessa disciplina de maneira que os conceitos que são, a rigor, contraditórios, não tenham que se anular reciprocamente. Em segundo lugar, deve-se notar o fato de a Semiótica, em particular a peirceana, ser uma ciência dos símbolos, o que favorece enormemente a compreensão da natureza da Matemática como prática profissional e social. A relação triádica ícone-índice-objeto permite uma compreensão mais adequada à natureza do objeto matemático do que qualquer outra filosofia ou perspectiva semiótica, sendo preciso distinguir entre representação, fato e objeto, de modo que, embora os objetos da Matemática não possam ser fornecidos empiricamente, eles podem ser explicados conceitualmente (Otte *et al*. 2020).

Foi assim que a leitura aprofundada do trabalho de Peirce, nos anos posteriores à publicação de *O Formal, o Social e o Subjetivo* (Otte, 1993), deu uma abordagem mais rica e completa às questões discutidas no mencionado livro.

Foi nesse contexto que, em seu artigo “Complementarity, Sets and Numbers” (Otte, 2003), Otte apresentou de maneira nova a noção de complementaridade, visando dar destaque ao papel do signo e das representações em relação à comunicação e à atividade matemática. Ele afirma que

> O conhecimento é uma atividade, e não uma imagem do espelho de algum mundo existente, e o que subjaz à frequente discussão relacionada à existência (de objetos, nota nossa) na matemática é o fenômeno da objetividade

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

> matemática, e não de objetos no sentido empírico concreto. Essa visão pragmática da matemática poderia ser reformulada da seguinte maneira: um conceito matemático, como o conceito de número ou função, não existe independentemente da totalidade de suas possíveis representações, mas também não deve ser confundido com nenhuma dessas formas de representação (Otte, 2003, p. 206, tradução nossa).

Dessa forma, combinada com a Semiótica, a complementaridade tem se mostrado, enquanto metodologia científica, muito eficaz para a interpretação de fatos ou conceitos da Matemática, da História da Matemática e da Filosofia da Matemática, ligando os problemas tradicionais a aspectos da construção do conhecimento matemático enquanto conhecimento simbólico e afirmando que, para caracterizar conceitos ou ideias ligadas à Educação Matemática, faz-se necessário apresentar características desses conceitos ou ideias que, embora aparentemente contraditórias, se complementam.

Refletindo sobre a importância da Semiótica, Michael Otte e Luis Radford organizaram uma reunião em 2005, na Alemanha, da qual participaram 14 educadores matemáticos, visando discutir abordagens da pesquisa em Educação Matemática e sua relação com a Semiótica:

> [...] Michael Otte e Luis Radford discutiram a possibilidade de realizar uma reunião para reunir um pequeno número de educadores matemáticos. O encontro aconteceu de 13 de julho de 2006, na Alemanha, sob o título *The promises and problems of a semiotic* approach to mathematics, the history of mathematics and mathematics education (As Promessas e Problemas de uma perspectiva semiótica da matemática, história da matemática e educação matemática) (Hoffmann; Lenhard; Seeger, 2005, p. vii, tradução nossa).

Após esses, outros encontros foram realizados, e o professor Michael Otte continua desenvolvendo pesquisas relacionadas à Complementaridade na perspectiva da Semiótica em Educação Matemática. Em 2018, foi publicado o livro *Signs of Signification: Semiotics in Mathematics Education Research*, em cujo capítulo “Semiotics, Epistemology, and Mathematics”, Otte procura responder duas questões principais, fruto do debate de anos sobre o assunto, e sobre as quais ele foi, no período em questão, pessoalmente questionado. As questões são: (1) Do que se está falando quando se fala numa fundamentação semiótica? Por que Otte buscou fundamentar a Educação Matemática na Semiótica peirceana, ao invés daquela criada por Ferdinand de Saussure (1857-1913)? 2. Por que, durante tanto tempo, a Semiótica não despertou maior interesse entre as comunidades de matemáticos e de educadores matemáticos?

Com esses exemplos, não procuramos resumir o debate dos últimos anos sobre a Semiótica, tarefa que não cabe no presente artigo, mas mostrar que as contribuições da Semiótica e os debates em torno de suas possibilidades e limitações continuam vivos.

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

3 Relações de complementaridade

A seguir, são apresentadas interpretações que buscam estabelecer um alinhamento conceitual em relação à Complementaridade em Otte. Buscamos enriquecer e aprimorar esse exercício por meio de explicações e exemplos, nos quais a evidência reside na compreensão de que a complementaridade envolve a consideração de características complementares inerentes a um fenômeno ou conceito, a fim de alcançar uma descrição completa. A complementaridade, por definição, abrange a abordagem de um fenômeno ou conceito em seus diversos aspectos, incluindo aqueles que podem ser contraditórios.

3.1 Complementaridade no processo de ensino e aprendizado de Matemática

Nos artigos e livros publicados com os resultados de suas pesquisas, Otte tem discutido, nas últimas décadas, diversas formas de complementaridade. Destacam-se, entre elas, as seguintes: meio e objeto, sentido e referência, objeto e representação, descoberta e criação, contínuo e discreto, Álgebra e Geometria, dentre outros. Todos os acima mencionados são exemplos de aspectos que podem ser discutidos, visando a uma compreensão mais adequada da Matemática, como enfoque à investidura de pesquisa em Educação Matemática e, consequentemente, como um modo de pensar a relação de ensino e aprendizagem em Matemática.

Uma forma importante de complementaridade, e que tangencia as formas de complementaridade anteriores, é aquela entre a linguagem e a Matemática. Quando se aprofunda sobre outros aspectos relacionados a Complementaridade, surgem dilemas que têm conduzido à concepção de duas visões opostas da Matemática: a Matemática como linguagem e a Matemática como atividade (Otte, 2014); divisão que advém de dois contextos específicos: o contexto sociocomunicativo e o contexto da filosofia da natureza da atividade. Por meio da Complementaridade, é possível conceber que a Matemática pode ser considerada como sendo as duas coisas ao mesmo tempo: se ela for definida como somente uma linguagem, perde-se a objetividade que a caracteriza e perde-se a intuição dos objetos da Matemática, noção tão importante para o raciocínio matemático, tanto do matemático quanto do estudante; por outro lado, se ela for definida como somente uma atividade, perde-se o reconhecimento de seu aspecto linguístico, além de também se perder a compreensão de sua objetividade (Otte, 2020).

Outra forma importante de complementaridade para a compreensão do processo de construção de conhecimento, é aquela entre linguagem e Objeto. É comum que

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

educadores e filósofos caracterizem a Matemática como uma linguagem; matemáticos puros, em oposição, costumam rejeitar pensar que Matemática seja uma linguagem, para eles a linguagem e a simbolização serviram apenas para comunicar nossas ideias, não desempenhando qualquer valor na criação da Matemática (Otte; Barros, 2015). Do ponto da Complementaridade, podemos afirmar que, de um lado, Matemática não pode ser confundida com uma linguagem, visto que ela tem, inegavelmente, objetos próprios que não são redutíveis à Lógica; por outro lado, tais objetos não existem de modo independente dos sujeitos e da linguagem, e Matemática, tal como concebida pelo menos desde o século XIX, tem na linguagem um fundamento importante, tanto do ponto de vista das demonstrações de seus resultados, quanto da própria definição de seus objetos.

Partindo da reflexão anterior, observamos que a complementaridade permite compreender também o dilema sobre se a Matemática é inventada (criada) ou descoberta. De um ponto de vista complementar, podemos perceber que a Matemática, muitas vezes, começa com a realização de construções de acordo com preceitos abstratos e, nesse sentido, signos são indispensáveis, passando, em seguida, a observar esses objetos imagináveis para, em seu interior, encontrar relações entre partes que não estavam especificadas ou definidas no objeto tal como foi construído inicialmente. Dessa forma, ela tem conceitos construídos e, ao mesmo tempo, conceitos descobertos. Assumindo-a como produtora de sistemas de representações, a Matemática pode ser considerada como a ciência que estuda "o que é" e "o que não é" logicamente possível, sem que, com isso, tenha que se posicionar a respeito da real existência daquilo que ela demonstrou ser possível (Otte, 2011).

Outro dilema que pode ser reformulado com base na abordagem da Complementaridade e perspectiva semiótica é o da relação entre teoria e prática: nesse caso, a questão central é a que nos é fornecida pela abstração hipostática — conceito definido por Peirce como o processo pelo qual se transforma um predicado num conceito (gramaticalmente, um adjetivo num substantivo) — que nos permite afirmar que a prática matemática não é uma prática sobre objetos empíricos, e sim uma prática sobre objetos criados por meio da linguagem e sobre ela deve intervir: se se pretende que os estudantes tenham contato com a Matemática prática, a partir de certa idade, não faz sentido ter na manipulação de objetos empíricos a atividade central da Matemática. De maneira análoga, um dado empírico obtido por observação só pode ser caracterizado e identificado como um fato científico, quando for possível relacioná-lo a uma perspectiva e abordagem teórica. Mesmo na prática da Educação, não é suficiente ensinar a resolução de problemas

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

se, antes, o aluno não for capaz de visualizar, entender e identificar o problema. Muitas vezes, os professores ensinam métodos e técnicas sem relacioná-los aos problemas e, depois, reclamam da falta de motivação dos estudantes.

Como mostramos nesses exemplos, assumir uma abordagem interpretativa da Complementaridade com base na perspectiva semiótica possibilita evitar obstáculos constituídos por aspectos e dimensões relacionados a diversos aspectos, objetos e fenômenos investigados que são, aparentemente, contraditórias. Isso se tem revelado particularmente fértil em Educação Matemática, cujos problemas cruciais podem ser reformulados em termos semióticos. Por exemplo: como podem os objetos e situações matemáticas ideais serem compreendidos se eles não podem, por um lado, serem captados sem signos, mas também, por outro, não podem, simplesmente, ser identificados com determinadas representações? Como se deve lidar com o problema, central para compreender signos, de que o significado de um signo é sempre constituído por meio da interpretação deste (outro) signo, e não antes disso?

Tais paradoxos podem ser compreendidos assumindo a abordagem da Complementaridade semiótica, pois ela permite que não se situem tais dimensões na posição de dualidades em polos opostos.

Mudar de ponto de vista é pré-requisito essencial tanto para o processo de ensino e aprendizado quanto para a dinâmica de teorias nas ciências. É importante que pesquisadores e educadores compreendam a possibilidade de uma enorme multiplicidade de representações, em particular, para evitar os problemas identificados pelas pesquisas associadas à noção de contrato didático (Brousseau, 1976); tais pesquisas verificam que é, por exemplo, um fenômeno comum, na sala de aula de Matemática, que o professor exija que os alunos apresentem os conceitos e soluções de problemas ou exercícios de uma única maneira, geralmente de maneira similar à do próprio professor, ao invés de estimular os alunos a criarem representações diversas dos problemas postos.

Além disso, como já foi destacado, todo processo de criação, comunicação e interação é operacionalizado por intermédio de símbolos; nas relações de ensino e aprendizado em Educação Matemática, isso é ainda mais importante, em razão do constante simbolismo que caracteriza a prática matemática. A aprendizagem ocorre por meio de símbolos e com símbolos, e os símbolos estão no coração da interação social em sala de aula.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

3.2 Complementaridade e os estudos de História da Matemática

A Semiótica de Peirce pressupõe, por princípio, uma perspectiva evolucionista, também chamada de genética, o que significa que os conceitos, de acordo com tal concepção, devem ser definidos de acordo com sua gênese, ou seja, sua origem, e compreendidos em estado de permanente evolução.

Essa é uma das razões pelas quais os trabalhos de Otte na área do que se chama Filosofia da Matemática não se reduzem ao estudo da Lógica, mas, sim, confundem-se com o estudo da evolução histórica das ideias matemáticas; e é a partir dessa compreensão que se pode deduzir que a dimensão histórica seja fundamental para entendermos a própria noção de complementaridade fundamentada na Semiótica. Desse modo, compreende-se por qual razão todos os trabalhos de Otte têm, em algum grau, uma dimensão e um componente histórico.

A noção de Complementaridade baseada na Semiótica de Peirce contribui também para a busca de uma visão histórica da Matemática, que supere a dicotomia apresentada por Tatiana Roque (2012) entre uma visão internalista da História da Matemática e uma visão externalista, ou seja, entre uma visão de observação da História da Matemática meramente de um ponto de vista da história das técnicas, independentemente de qualquer questão social; ou meramente do ponto de vista de sua história social, como se ela não tivesse conteúdo próprio. Nesse sentido, a Semiótica nos possibilita unir ambas as perspectivas.

Isso se revela de importância maior, pois, assim, a História da Matemática contribui para o diálogo para fora da comunidade de especialistas sem, com isso, deixar de mostrar as particularidades próprias da Matemática. Afinal, questões que, para não matemáticos, possam parecer meramente técnicas, muitas vezes expressam o amadurecimento que resultou — ao mesmo tempo, em que é resultado — de transformações intelectuais profundas, cujas descobertas tiveram impacto considerável nas ciências, na Filosofia e na própria mentalidade da população ou da intelectualidade de uma época.

As pesquisas em História da Matemática, feitas com base na metodologia da Complementaridade, ao evitarem as dicotomias relatadas acima, que eram muito presentes na Alemanha e em diversos países no início da década de 70, contribuíram muito para fortalecer uma característica muito peculiar dos trabalhos de Otte: a recusa a qualquer redução psicológica e sociológica da Matemática, de um lado, e a recusa à

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

concepção de muitos matemáticos de que a história de sua disciplina não passa de fofocas (Otte, 2007).

3.3 Complementaridade e interdisciplinaridade

Antes de tratar do assunto em questão, destacamos que Michael Otte é um leitor e estudioso disciplinado, com especial interesse por História, Arte (em diversas formas), fauna e flora (em especial a do pantanal mato-grossense); além, claro, por obras de História da Matemática e de Filosofia. Enfim, é um professor e intelectual nato, para quem a interdisciplinaridade não é um esforço, mas parte constitutiva das disciplinas, pois, de outro modo, são observadas com olhar excessivamente treinado pela divisão do trabalho.

Na mencionada busca por fundamentar a Educação Matemática, Otte já observava que essa fundamentação só poderia ser concebido e deveria ocorrer de maneira interdisciplinar, ou seja, dialogando com diversas disciplinas. De outro modo, a complementaridade entre essas se efetiva na potencialização dialógica entre as diversas áreas de conhecimento. Ele resumiu seu empreendimento como uma busca por “[...] inserir em um contexto interdisciplinar aquilo que já existia no campo da disciplina didática clássica da matemática” (Hoffmann; Lenhard; Seeger, 2005, p. 361-378, tradução nossa).

Em sua concepção, a Educação Matemática é necessariamente uma disciplina relacionada com “educação” no sentido mais amplo desse termo. Concebeu, nesse sentido, que a Educação Matemática deveria acompanhar o que estaria sendo feito nas mais diversas ciências com as quais ela mesma se relaciona (Teoria da Cognição, Psicologia, Filosofia, Sociologia e, claro, Matemática), tentando situá-la como uma espécie de ciência de base aplicada.

Já nas primeiras publicações em que apresentou a questão da interdisciplinaridade, Otte (1991, 1993) observava que, de modo geral, destacam-se duas características principais do desenvolvimento científico moderno: por um lado, a interdisciplinaridade (integração) e, por outro, a especialização. Contudo, deve-se notar que a interdisciplinaridade no conhecimento especializado não se processa com a mesma evidência funcional que a especialização. É importante reconhecer que o desenvolvimento das ciências não foi totalmente baseado em um sistema autônomo, regido apenas por leis particulares, as ciências se desenvolveram ligando-se a outros subsistemas sociais; contudo esse conjunto de ligações interdisciplinares não foi tão

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

facilmente identificado e explicitado quanto à especialização. Para melhor compreender este desenvolvimento, é necessário relacionar as diferentes funções da ciência e os diferentes elementos de sua epistemologia e metodologia. A Educação Matemática, enquanto movimento organizador, deve possibilitar a interdisciplinaridade, promovida por uma base de cooperação e comunicação clara no fazer pedagógico.

Otte concebia ser fundamental a natureza interdisciplinar para a produção de conhecimento em Educação Matemática, sendo esta sua condição prévia de elaboração; e ainda acrescentava, buscando reforçar este entendimento, a necessidade, para elas, de uma “intuição comum e um alvo que se legitime como um objetivo social prático” (Otte, 1993, p. 110), algo que ele imprimiu em seus próprios estudos.

Tal busca por interdisciplinaridade inseria-se no contexto do estabelecimento de fundamentos para a Educação Matemática, o que se relacionava com a criação de uma identidade própria de tal disciplina, associada com sua existência e autonomia. Embora pareça contraditório, Otte (1991, 1993), corroborado pelas afirmações de Hoffmann, Lenhard e Seeger (2005), considera que somente por meio de uma organização no campo da interdisciplinaridade com outras ciências é que a Educação Matemática poderia encontrar sua autoimagem característica; caso contrário, ela estaria sempre na posição de “pedagogia da matemática”, “psicologia da matemática”, tentativas já realizadas e insuficientes.

Otte (1993) considera que essa mesma dificuldade de fundamentar a Educação Matemática pode ser notada na atuação dos professores em sala de aula:

> [...] essa deficiência na caracterização do objetivo, que acompanha a forte orientação metódica da especialização científica, verifica-se até entre os professores. No corpo docente, a especialização é levada tão longe que, mesmo entre os professores de uma mesma área, surgem sérias dificuldades em todas as questões curriculares. Onde existe obrigação de coordenação e sintonização, como na preparação de um programa disciplinar dentro de uma grade curricular, fortifica-se ainda mais orientação técnico-metódica (Otte, 1993, p. 111-112).

A complementaridade requer e só se realiza por meio da interdisciplinaridade, na concepção expressa por Michael Otte (1991, 1993); e, de fato, tal interdisciplinaridade pode ser claramente notada em todos os trabalhos desenvolvidos e orientados por ele.

Por outro lado, a incorporação da perspectiva semiótica amplia um empreendimento interdisciplinar, pois a Semiótica aplica-se a todas as formas de produção de conhecimento. Ainda de acordo com a concepção otteana de complementaridade, isso denotou um passo significativo na busca da fundamentação da Educação Matemática, com ênfase interdisciplinar, e tal incorporação contribuiu para

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

despertar entre estudiosos, criadores e pesquisadores em Educação Matemática, a esperança de que Complementaridade pudesse vir a oferecer um novo e promissor caminho para uma fundamentação da Educação Matemática que fosse capaz, mais do que os esforços anteriores, de conduzi-la a estabelecer-se como campo acadêmico independente.

4 Aplicações da abordagem metodológica da Complementaridade à pesquisa

Como é conhecido, o professor Michael Otte tem vasta experiência com orientação de pesquisas em nível de mestrado e de doutorado. Foi ao longo de todos esses anos de realização e orientação de pesquisas que desenvolveu a metodologia e a maneira prática de ajudar seus alunos a conduzirem suas próprias pesquisas. No que segue, são apresentados os aspectos imprescindíveis para a constituição da postura metodológica da Complementaridade otteana à pesquisa em Educação pela Matemática.

Na prática de orientação de pesquisas, Otte sempre enfatiza que o processo metodológico, em qualquer atividade que envolva pesquisa, é, sobretudo, um processo criativo e realça que, no percurso investigativo, pesquisador e objeto vão se constituindo mutuamente diante da problemática que se pretende investigar.

Ao apresentar o livro de Michael Otte, *O formal, o Social e o Subjetivo*, Bicudo (Bicudo, 1993, p. 8-9) afirma, sobre a escrita de Otte e a Complementaridade:

> [...] o pensamento do autor não se apresenta de modo linear, conduzindo a compreensão interpretativa do leitor nos caminhos das articulações explicitadas para levá-lo às conclusões de um pensar. [...] Ele pensa com ‘imagens’, à maneira de uma aquarela. Como se tivesse diante de si um espaço em branco e ali colocasse ‘borrões’ de tinta, aparentemente ‘jogados’, os quais, trabalhados em forma e cor, compõem o quadro. O texto construído por ele também é assim: suas ideias são lançadas em termos opostos e, então, o texto é construído como uma estrutura entre essas ideias. Porém, não é uma estrutura que surge segundo uma lógica sequencial e linear. Avança por saltos, em busca de compreensões mais iluminadoras e abrangentes. Michael Otte trabalha sistematicamente na direção de vislumbrar "complementaridades", evitando "concretitudes" falsas das palavras. Antes, enfatiza a polissemia das mesmas. [...] Antes, são ‘aquarelas’ que podem tocar o leitor, levando-o a construir seus próprios significados. Assim, vejo seus textos como que destinando-se aos que buscam compreensões e pesquisam temas.

A compreensão de um determinado problema investigativo está relacionada diretamente com o processo construtivo da pesquisa. Este último é nomeado por Otte (2014) de “fio vermelho” de uma dada pesquisa e consiste em um tipo de caminho que vai sendo cunhado a cada etapa e descoberto, sem uma certeza antecipada de onde se vai ou se pretende chegar.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

> Nesses termos, para redigir um projeto, não existe a preocupação em trilhar por uma linha reta, por um único caminho estreito e bem ajustado ou modelado, escolhemos alguns autores basilares para iniciarmos nossa jornada e, conforme nossas leituras, dificuldades, prazeres, desejos, necessidades, limitações, compreensões teóricas e, assim por diante, vamos definindo os próximos passos, sempre sabendo que as leituras podem ser retomadas a qualquer tempo conforme nossas necessidades, ou talvez nem ao menos sejam citadas em nosso trabalho. Percorremos um caminho de idas e voltas, mas que avança, em alguns momentos mais lentamente, em outros a pesquisa deslancha, contudo neste movimento temos sempre nosso objetivo, um alvo a ser alcançado e hipóteses iniciais estabelecidas (Santana, 2019, p. 48-49).

O fio vermelho, objetivamente, é uma espécie de índice provisório, que vai sendo construído, alterando-se, enriquecendo-se ou perdendo tópicos — a cada etapa e descoberta da pesquisa. Nos seminários e orientações, Otte afirma que inexiste um percurso definitivo a que possamos nos prender, pois as possibilidades de caminhos que conduzem ao estabelecimento e construção desse fio vermelho são ilimitadas.

No que diz respeito aos procedimentos da pesquisa, a metodologia em questão consiste na leitura e na análise de textos em uma perspectiva semiótica — que não se limita à compilação de dados ou mapeamentos —, mas que visa compreender as representações e os significados construídos em um texto, tanto na visão do autor quanto na do leitor ou tradutor dos signos. Essa tradução e leitura consideram a intuição, mas se fundamentam, também, nas bases teóricas de outros textos e autores.

Nas próximas linhas, procuramos exemplificar de que maneira a metodologia da Complementaridade se desenvolve e se constitui, enquanto pressuposto metodológico em pesquisas acadêmicas. Para tanto, selecionamos alguns trabalhos de pesquisa acadêmica orientados ou coorientados pelo professor Michael Otte.

Apontamos o fio vermelho em cada estudo e apresentamos um breve resumo, buscando destacar a interpretação da Complementaridade: no processo de ensino e aprendizado da Matemática, nos estudos de História da Matemática e na interdisciplinaridade.

4.1 Dissertação: Prova e explicação em Bernard Bolzano (Clímaco, 2007); tese: Intuição e conceito: a transformação do pensamento matemático de Kant a Bolzano (Clímaco, 2014)

Um dos temas investigados, e alvo de diversas publicações, por Michael Otte, e também objeto de orientação de um mestrado e um doutorado, foi a obra do filósofo, teólogo e matemático de origem tcheca chamado Bernard Bolzano (1781-1848). Suas

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

investigações sobre esse tema, inicialmente, deram-se a partir da tomada de conhecimento de trabalhos publicados e discutidos, em particular no âmbito da Comissão Internacional de Instrução Matemática (International Commission on Mathematical Instruction / ICMI), intitulada Psicologia da Educação Matemática (Psycology of Mathematics Education /PME), sobre o debate entre “provas que provam e provas que explicam”.

A dissertação *Prova e Explicação em Bernard Bolzano* (Clímaco, 2007), defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação do Instituto de Educação da Universidade Federal de Mato Grosso, discute a questão do modo que segue.

Em 1983, Gila Hanna publicou *Rigorous Proof in Mathematics Education* (Hanna, 1983), livro pioneiro na discussão das provas e explicações em Educação Matemática, seguido de uma série de publicações da mesma autora, nas quais defende haver provas mais adequadas para a sala de aula, como as que remetem a alguma forma de intuição. Já em seu artigo de 1989, “Proofs That Prove and Proofs That Explain” (Hanna, 1989), Hanna refere-se à distinção de Steiner, feita em 1978, para defender que existem dois tipos de provas, as que apenas provam e as que, além de provar, explicam; embora a concepção de Steiner seja consideravelmente diferente daquela da autora, visto que ele busca uma espécie de prova “das essências”, e não da intuição, como Hanna o faz. Por fim, no artigo “Proof, explanation and exploration: an overview” (Hanna, 2000), a pesquisadora retoma o debate das últimas décadas e reafirma que existem provas que mostram o significado de algo, enquanto algumas somente comprovam que algo é verdadeiro.

Steiner e Hanna, embora não citem Bolzano, buscam uma noção de explicação que não se limite à busca de uma *causa eficiente*, para utilizar a terminologia aristotélica: eles buscam provas que não apenas mostram *o quê*, mas também o *porquê* (Aristóteles, 2004, 71b 25), repetindo o que Bolzano fez no início do século XIX, uma busca por retomar uma Matemática em que não haja apenas uma relação de dedução, mas também de fundamentação.

Desde que tal debate surgiu, Otte tinha muita clareza — expressa em seus seminários — de que havia, nos autores que defendiam tais distinções, uma incompreensão fundamental da natureza da Matemática moderna, e mesmo da ciência moderna, pelo fato de não explicar os conceitos em conformidade com a concepção de explicação do senso comum.

O estudo, nessa dissertação, da obra de Bolzano, deu-se em razão de que ele foi o primeiro moderno a discutir a relação entre provas que provam e provas que explicam.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

Em *Die Wissenschaftslehre oder Versuch einer neuen Darstellung der Logik* [*Doutrina da Ciência*], Bolzano (1929) defendeu a existência de tal diferenciação, retomando Aristóteles; mas Bolzano não pôde, à época, enxergar uma importante contradição em sua própria obra: apesar dessa defesa de uma posição aristotélica, sua obra acabou contribuindo para um ideal de fundamentação da Matemática na linguagem, ao buscar eliminar o recurso à intuição geométrica, ao tempo e ao espaço; assim, sem se dar conta, Bolzano acabou contribuindo com a tendência axiomática típica do século XX (retratado, em seguida, no trabalho *O Termo 'Axioma' no Tempo, Considerando a Relação entre a Filosofia e a Matemática Alicerçada no Pensamento sobre Complementaridade 'Otteano'* (Paula, 2014)), chamada "hipotético-dedutiva", que considera os axiomas como escolhidos em função da fertilidade para uma área da Matemática, e não como algo ontológico; a consequência, então, da obra de Bolzano, foi que ela contribuiu para romper com a diferenciação entre provas que provam e provas que explicam.

A tese *Intuição e Conceito: A Transformação do Pensamento Matemático de Kant a Bolzano* (Clímaco, 2014), defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Goiás, discutiu a evolução da noção de conceito e como se desenvolveram as complementaridades entre análise e síntese, entre métodos e objetos, entre intensão e extensão na Matemática ao longo da transformação mencionada no título.

Em continuidade ao trabalho discutido na dissertação *Prova e Explicação em Bernard Bolzano* (Clímaco, 2007), a pesquisa realizada no contexto da redação dessa tese aprofunda a investigação da relação entre intuição e conceito em Kant e em Bolzano, em particular visando compreender de que forma, e em que medida, as transformações ocorridas no conhecimento e na forma de concebê-lo, no século XIX, tinham preocupações com a organização do conhecimento e com sua apresentação didática.

Para tanto, ficou demonstrado que uma transformação de natureza social foi muito importante, pois, em particular com a Revolução Industrial, a questão da publicização do conhecimento ganhou uma importância maior, e foi discutida a transformação ocorrida na Matemática — que Bolzano foi talvez o primeiro a compreender de maneira plena — relaciona-se com uma transformação mais geral do conhecimento e da forma como nos relacionamos com as palavras: a transformação de verbos em conceitos, algo próprio da Filosofia, e para o qual a língua alemã — língua em que Kant e Bolzano escreveram suas obras — é particularmente propícia.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

Em ambos os trabalhos sobre Bolzano acima descritos, é possível identificarmos uma profunda interdisciplinaridade: notam-se as discussões no interior da Educação Matemática relacionadas à Psicologia e a possíveis meios de facilitar as demonstrações matemáticas; vemos a Matemática pura na análise do trabalho matemático de Bolzano; é possível identificarmos uma discussão filosófica, ou metamatemática, sobre a natureza dos axiomas e de sua relação com as noções de conceito e de intuição; resgatamos a história da Bohemia, onde nasceu Bolzano, e suas relações políticas e religiosas com o Império Austríaco; reconhecemos uma discussão filosófica profunda sobre a relação entre as concepções de intuição e de conceito de Bolzano; identificamos a discussão sobre o quanto o esforço de reescrever o conhecimento de maneira organizada, típica do século XIX, associa-se com um esforço didático, o que relaciona a formalização da Matemática, de maneira aparentemente contraditória, com necessidades educacionais.

As pesquisas que originaram a dissertação e a tese sobre Bolzano não visavam apresentar propostas para o processo de ensino e aprendizado, e sim tornar mais claros conceitos alvos de mal-entendidos na literatura educacional sobre a relação entre intuição e conceito e provas que provam e provas que supostamente deveriam, além de provar, explicar o que algo significa. A Complementaridade destacada e estudada em ambas as obras — e que determina sua estrutura ou fio vermelho — é aquela entre intuição e conceito.

4.2 Tese: O termo ‘Axioma’ no tempo, considerando a relação entre a Filosofia e a Matemática, alicerçada no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’ (Paula, 2014)

Entre 2011 e 2014, Otte orientou a pesquisa de doutorado intitulada *O termo ‘Axioma’ no tempo, considerando a relação entre a Filosofia e a Matemática, alicerçada no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’* (Paula, 2014), no Programa de Pós-Graduação em Educação do Instituto de Educação, da Universidade Federal de Mato Grosso. Essa pesquisa teve como questão norteadora inicial saber, em relação ao Conhecimento Matemático e sua constituição: o que significa o fato de o termo ‘axioma’ até o século XIX ser tomado como antônimo de hipótese e, atualmente, ser considerado como sinônimo.

A investigação foi delineada metodologicamente — o fio vermelho — pela abordagem da Complementaridade do pensamento otteano, explicando sua natureza

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

histórica e filosófica de cunho interdisciplinar e realizando sua análise em fundamentos teóricos da Semiótica, para compreender os significados assumidos pelo termo ‘axioma’, de Platão até a Modernidade. Os recortes e direcionamentos indicaram que o(s) significado(s) e oscilações decorrentes e assumidos pelo termo ‘axioma’ podem ser explicados do ponto de vista da relação sócio-histórica e epistemológica entre linguagem e Matemática.

A tese destaca a mudança do significado do termo axioma, evidenciada pela evolução histórica da relação que os diversos pensadores estabeleceram entre a linguagem e a Matemática. Tal mudança foi operacionalizada por um deslocamento de ênfase, na produção de conhecimento, dos aspectos descritivo-contemplativos para os aspectos operativo-instrumentais, de modo que a objetividade da Matemática passou a revelar-se na atividade e nas aplicações futuras e não mais em termos de fundamentos *a priori*, tema que — como foi visto — também apareceu nos trabalhos sobre Bolzano.

Na perspectiva que predominou em Matemática até o século XVIII, ao axioma é atribuído o sentido de verdades imutáveis, mas, conforme a abordagem da Complementaridade semiótica, o significado dos axiomas deve ser buscado nas aplicações futuras dessa teoria, como algo dinâmico.

O estudo observou que, àquela época, uma mudança tão intensa e importante não se operacionalizou somente em Matemática e em relação a seus conceitos. A Revolução Industrial delineou uma enorme transformação no sentido de muitos conceitos e palavras e, por consequência, operou uma profunda mudança na configuração e *status* do conhecimento humano e das ciências.

A Complementaridade, ao se valer dos estudos de cunho histórico, nesse caso direcionados a estruturas conceituais da Matemática, conduz-nos a interpretar que tal transformação conceitual é operacionalizada, tendo em vista que a linguagem deixa de ocupar papel eminentemente intuitivo e passa a assumir papel significativo e uso mais formal, na e para a construção do conhecimento. Esse movimento de aproximação entre linguagem e Matemática permite que a práxis ou atividade humana se transforme em objetos da tecnologia. Em particular, a Matemática passa a configurar-se, ela mesma, um campo de aplicação da Matemática, conformando o processo em que a Matemática deixa de ser a serva da Astronomia, da cronometria e da Mecânica, e se transforma em Metamatemática, fenômeno tratado também nos trabalhos sobre Bolzano acima mencionados.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

A elaboração do conhecimento abandona uma perspectiva estruturante, baseada na abstração empírica, e assume a "abstração reflexiva" (Piaget, 1995). Nessa direção, a nossa atividade no mundo deve ser transformada em um objeto de reflexão, e essa transformação se ancora em contextos representacionais sígnicos. Com o aporte da linguagem dos signos, construímos conceitos teóricos, ao invés de os idealizarmos como imagens abstratas das coisas; e tais conceitos, a partir de então, passam a ser utilizados como instrumentos operatórios. É nesse contexto, e no período histórico em que ocorre a Revolução Industrial, que surgem os axiomas da Aritmética, os quais — diferentemente daqueles da Geometria, que haviam sido criados na Grécia Antiga — são baseados na atividade, ou melhor, na recursão. Todas essas transformações perpassam por uma compreensão e pelo reconhecimento do papel da linguagem na elaboração de conhecimento e sua relação de complementaridade com o pensamento matemático.

Mesmo os axiomas sendo tomados no sentido de hipóteses, o que poderia levar a crer que o conhecimento matemático se direcionaria a uma relativização de toda a produção de conhecimento da Matemática, as consequências dessa mudança são profundas e indicam, contraditoriamente, uma objetivação do processo de axiomatização. Isso significa que assumir os axiomas como hipótese, ao contrário de relativizar suas escolhas, delineou um movimento e definiu parâmetros em que a produção e a estruturação do conhecimento se tornam mais objetivas e formais.

Nesta tese, mostramos, por meio de exemplo histórico, que a complementaridade otteana baseada na Semiótica possibilita que dimensões, aspectos ou elementos que até então eram tomados como contraditórios, neste caso a linguagem e a Matemática, podem ser definidos de maneira complementar, e que a postura interdisciplinar — neste contexto, a relação entre História, Filosofia e Matemática — é fundamental para ampliar interpretações relacionadas ao desenvolvimento do conhecimento matemático.

A base teórica que sustentou a pesquisa sobre a evolução da noção de axiomas foi a Complementaridade otteana baseada na Semiótica e, no percurso da pesquisa, reconhecemos que a conceitualização funciona como um tipo de 'ferramenta' desenvolvida pelo ser humano e não como resultado da elaboração de um ou poucos sujeitos isolados.

Desse modo, constatamos que realizar uma pesquisa de natureza histórica, filosófica e interdisciplinar permite inferir que, mesmo entre pensamentos contraditórios, entre teorias que se opõem, há uma relação de complementaridade, ou seja, é a partir de um movimento tensional gerado, como que no "balançar do pêndulo" entre aspectos

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

polarizantes/contraditórios dos fenômenos e/ou teorias, que assistimos emergir a potencialidade criativa da mente humana (Paula, 2014); por isso a abordagem Complementaridade foi requerida.

De todo, o estudo em questão (Paula, 2014), ao tempo em que oportuniza aos investigadores e educadores em Matemática ampliarem suas reflexões sobre a gênese e a historicidade do Conhecimento Matemático, apresenta a Complementaridade otteana como possibilidade de uma nova forma de abordagem metodológica e didática.

4.3 Tese: A Complementaridade entre sentido e referência dos símbolos da Matemática (Santana, 2019)

Entre os anos de 2017 e 2019 e conforme seus alunos questionavam sobre qual seria a metodologia que estariam utilizando em suas pesquisas, o professor Otte voltou a se dedicar de maneira intensa à questão da Complementaridade associada à Semiótica e à Educação Matemática. Nesse período, orientou a tese intitulada *A Complementaridade entre sentido e referência dos símbolos da Matemática* (Santana, 2019), pesquisa vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, cujo fio vermelho foi constituído pela análise da importância dos signos para a Matemática com base na Semiótica.

A tese apresenta o desenvolvimento do estudo histórico para evidenciar o caráter interdisciplinar complementar implicado no desenvolvimento das representações semióticas em Matemática e nas ciências, a partir da Revolução Científica ocorrida no século XVII, período em que, segundo Michel Foucault (1926-1984), baseou-se essencialmente na compreensão da relativa independência entre sentido e referência das representações simbólicas.

Evidenciamos que a abordagem da Complementaridade, ao enfatizar e destacar o estudo histórico, mostra que, de fato, no trabalho de Foucault (2000), a referida relação concebeu-se por meio das constantes mudanças na representação das coisas pelas palavras ao longo da história da Ciência e, com base numa perspectiva semiótica, destacamos a necessidade de considerar as coisas como signos, em um processo que envolve a interpretação do sujeito tanto sobre sentido como sobre referência.

Em Ernst Cassirer (1874-1945), identificamos que a relação entre sentido e referência das representações ao longo da história se concebeu por meio de complexa

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

discussão filosófica a respeito da noção de conceitos em ciência, o que teve importante repercussão em Matemática.

Também na obra de René Descartes (1596-1650), reconhecemos o potencial da utilização de símbolos para representar objetos desconhecidos da atividade científica e matemática. Por meio da investigação, chegamos, na tese, ao resultado que Descartes introduziu o método experimental no pensamento matemático e que em tal introdução encontram-se as raízes da noção moderna de teoria axiomática e, em Álgebra Linear, concluímos que a obra *Die Lineale Ausdehnungslehre* (1844), de Hermann Grassmann (1809-1877), é um exemplo dessa evolução fomentada por Descartes.

Também exploramos a compreensão e a exposição da relação entre sentido e referência, historicamente vinculada à epistemologia do signo. Esse vínculo está imerso na cultura e no pensamento de cada época, e percebemos não haver uma distinção clara entre sentido e referência até o surgimento do nominalismo moderno. Essa corrente considera os conceitos e os signos como construções mentais do sujeito cognoscente. Em contraponto, Peirce (1931-1935) identificou a origem dos signos nos objetos, entendendo-os como perspectivas subjetivamente interpretadas e incompletas. A relação entre sentido e referência, portanto, está intrinsecamente ligada a um processo de *semiosis*, no qual não se estabelece um sentido ou referência final em relação ao objeto.

Por último, na tese, são apontadas implicações relevantes para a Educação Matemática. Uma delas é a superação da dicotomia comum entre psicologismo e platonismo por meio da abordagem semiótica. Essa perspectiva proporciona uma visão sintética sobre como o processo de aprendizagem e de conhecimento da Matemática ocorre.

Nesse contexto, podemos inferir que a Educação Matemática, embasada na Semiótica e na Complementaridade, abre caminhos para um empreendimento interdisciplinar e histórico, proporcionando oportunidades de colaboração no ensino, no aprendizado e na pesquisa.

5 Considerações finais

Apresentar a metodologia de pesquisas em Educação Matemática, fundamentada no pensamento sobre Complementaridade de Michael Friedrich Otte, é uma tarefa de grande complexidade. A Complementaridade otteana baseia-se em Semiótica. Otte concebe que a pesquisa em Educação Matemática exige criatividade (ousadia) e, ao

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

mesmo tempo, muita leitura e fundamentação teórica. Ele destaca que uma postura que privilegie a Complementaridade direciona-se no sentido de mais liberdade criativa, uma vez que a cada movimento de investigação, de aproximação com o objeto de pesquisa, o caminho, o 'método' vai se constituindo e sendo construído, o que também é uma forma de complementaridade expressa na relação entre sujeito, objeto e método.

Qualquer que seja o objeto (ou problema) e o sujeito que se debruça sobre o primeiro, é importante destacar que objeto e sujeito se caracterizam pelo fato de não estarem isolados, sendo ambos dirigidos e imbricados entre si — 'de' e 'em' um sistema de relações — e esses sistemas de relações transformam-se constantemente, de acordo com o tempo, com exigências sociais, políticas, culturais e científicas.

Otte alerta que uma construção e uma estruturação metodológica, mesmo delineadas pela Complementaridade, correm o risco de limitar sua autonomia numa suposta autodeterminação de seus objetivos e métodos, se essas ações não tematizarem esses mesmos objetivos e métodos, tomando-os suficientemente definidos por eles mesmos dentro de determinados espectros. Assim, a proposta otteana realça a necessidade de uma formulação dos interesses que objetivamente conduzem a objetos e métodos, pois — sem esse movimento — todo empreendimento científico esvazia-se, desconectando-se da sociedade e impedindo que reflita sobre seu próprio desenvolvimento.

Otte assume a Complementaridade, ambicionando à constituição de outro caminho, outra propositura de abordagem ao objeto e à constituição metodológica à pesquisa em Educação Matemática. Nessa direção, esse pesquisador procura conectar os objetos investigativos relacionados à Educação Matemática, definindo-os não apenas quanto a seu conteúdo, mas também socialmente. Para Otte, a autocompreensão e o desenvolvimento da Educação Matemática estão fortemente relacionados com processos que são também extracientíficos, no sentido de que só podem ser compreendidos no contexto externo da ciência em questão — em particular, em seus aspectos históricos e sociais.

Desse modo, compreendemos que a Complementaridade seja pautada pela historicidade, pela Filosofia, pela interdisciplinaridade e fundamentada na perspectiva semiótica. Para Otte, são essas dimensões que nos permitem e nos possibilitam tematizar objetivos e métodos, e só posteriormente analisá-los, interpretá-los e avaliá-los. Objetos e métodos têm características específicas e históricas, sujeitas a determinações sociais, que reverberam interna e externamente em suas áreas originárias.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

Na estruturação deste artigo, buscamos apresentar aspectos elementares que formam a metodologia semiótica baseada no pensamento otteano. Foram apresentadas as relações de complementaridade e também pesquisas que foram desenvolvidas, tendo como fundamento a Complementaridade otteana baseada em Semiótica. Dessa forma, buscou-se evidenciar as dimensões históricas, interdisciplinares e semióticas presentes no exercício investigativo dos pesquisadores ao constituírem seus objetos de pesquisa, aprofundar-se sobre eles e executar a pesquisa, visando compreender e responder sua problemática central.

É a partir desse movimento que vemos aflorar o potencial interpretativo da abordagem da Complementaridade, especialmente ao tornar possível a análise e a compreensão mais apropriadas, tanto do objeto como do problema dele decorrente.

Em suma, adotar uma abordagem metodológica de pesquisa fundamentada na abordagem da Complementaridade otteana exige, do pesquisador em Educação Matemática, assumir o propósito de construção e constituição de uma “sempre renovada” postura investigativa, a cada problema e objeto que se pretende investigar.

Referências

ARISTÓTELES. **Segundos analíticos**. Tradução de Lucas Angioni. Campinas: Unicamp/Departamento de Filosofia (IFCH), 2004.

BOLZANO, B. **Die Wissenschaftslehre oder Versuch einer neuen Darstellung der Logik**. 2. ed. Organização de Wolfgang Schultz. Hamburgo: Felix Meiner, 1929.

BICUDO, M. A. V. Prefácio. In: OTTE, M. F. **O Formal, o Social e o Subjetivo**: uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática. São Paulo: Editora da Unesp, 1993. p. 8-9.

BROUSSEAU, G. P. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In: VANHAMME, J.; VANHAMME, W. (ed.). La problématique et l'enseignement des mathématiques. RENCONTRE ORGANISÉE PAR LA COMMISSION INTERNATIONALE POUR L'ETUDE ET L'AMÉLIORATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES, 28., 1976, Louvain la Neuve (Belgique). **Comptes rendus** […]. Louvain la Neuve: ICME, 1976. p. 101-117. Disponível em: https://hal.science/hal-00516569v2/document. Acesso em: 31 out. 2023.

CLÍMACO, H. de A. **Prova e Explicação em Bernard Bolzano**. 2007. 163 p. Dissertação (Mestrado em Educação) — Instituto de Educação, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 2007.

CLÍMACO, H. de A. **Intuição e conceito**: a transformação do pensamento matemático de Kant a Bolzano. 2014. 170 p. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

FOUCAULT, M. **As palavras e as coisas**: Uma arqueologia das ciências humanas. 8. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

GRASSMANN, H. **Die lineale ausdehnungslehre, eine neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert**. Leipzig: Verlag von Otto Wigand, 1844.

HANNA, G. **Rigorous Proof in Mathematics Education**. Toronto: OISE Press, 1983.

HANNA, G. Proofs That Prove and Proofs That Explain. In: VERGNAUD, G.; ROGALSKI, J. (org.). **Anais do Grupo internacional de Psicologia da Educação** Matemática, 1989. V.2, p.45-51.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics** (EMS), Dordrecht, v. 44, p. 5-23, dez. 2000.

HOFFMANN, M. H. G.; LENHARD, J.; SEEGER, F. (ed.). **Activity and Sign**: Grounding Mathematics Education. [*S. l.*]: Springer Science, 2005.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. Introdução e notas de Alexandre Fradique Morujão. 5. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1787-2001.

OTTE, M. F. **Das Formale, das Soziale und das Subjektive**: eine einführung in die Philosophie und Didaktik der Mathematik. Frankfurt: Suhrkamp Verlag, 1991.

OTTE, M. F. **O Formal, o Social e o Subjetivo**: uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática. São Paulo: Editora da Unesp, 1993.

OTTE, M. F. Limits of Constructivism: Kant, Piaget and Peirce. **Science & Education**, [*S. l.*], v.7, p. 425-450, sep. 1998. https://doi.org/10.1023/A1008635517122.

OTTE, M. F. Complementary, Sets and Numbers. **Educational Studies in Math**, [*s. l.*], v. 53, p. 203-228, sep. 2003. https://doi.org/10.1023/A:1026001332585.

OTTE, M. F. Mathematical history, philosophy and education. **Educational Studies in Mathematics** — The History of Mathematics Education: Theory and Practice, [*S. l.*], v. 66, n. 2, p. 243-255, oct. 2007. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/27822702. Acesso em: 3 maio. 2023.

OTTE, M. F. Evolution, Learning, and Semiotics from a Peircean Point of View. **Educational Studies in Mathematics**, [*S. l.*], v. 77, n. 2/3, p. 313–29, jul. 2011. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/41485931. Acesso em: 4 abr. 2023.

OTTE, M. F. **Generalizar é Necessário ou mesmo Inevitável**. 2014 (Manuscrito não publicado, datado de 07 de abril de 2014).

OTTE, M. Semiotics, Epistemology, and Mathematics. In: PRESMEG, N.; RADFORD, L.; ROTH, W. M.; Kadunz, G. (ed.). **Signs of Signification**. ICME-13 Monographs. [*S. l.*]: Springer, Cham, 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2_9.

OTTE, M. F. Hegel, Peirce e Nós. **Revista Pesquisa Qualitativa**, São Paulo, v. 8, n. 18, p. 324-356, out. 2020. DOI: https://doi.org/RPQ.2020.v.8,n.18.335.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2024.v.12.n.31.666

OTTE, M. F; BARROS, L. G. X. de. Matemática e Linguagem. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, [*S. l.*], v. 3, n. 1, p. 01-12, jul. 2015. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/27994/1/Otte2015MATEM%C3%81TICA.pdf. Acesso em: 3 abr. 2023.

OTTE, M. F.; ABIDO, A. S.; BARROS, L. G. X. de; PAULA, L. de; SANTANA, G. F. da S. Some Short and Important Explications about Semiotics. **Jornal Internacional De Estudos Em Educação Matemática**, Londrina, v. 12, n. 3, p. 268-274, dez. 2019. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2019v12n3p268-274

OTTE, M. F.; BARROS, L. G. X. de; ABIDO, A. S.; SANTANA, G. F. da S.; PAULA, L. de. Why Should We Speak About A Complementarity Of Sense And Reference? **REAMEC** - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, [S. *l.*], v. 8, n. 1, p. 77-95, jan./abr. 2020. DOI: https://doi.org/10.26571/reamec.v8i1.9197.

PAULA, J. B. de. **O termo 'Axioma' no tempo, considerando a relação entre a Filosofia e a Matemática, alicerçada no pensamento sobre Complementaridade 'Otteano'**. 2014. 539 p. Tese (Doutorado em Educação) —Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=1534870. Acesso em: 30 out. 2023.

PEIRCE, C. S. **CP = Collected Papers of Charles Sanders Peirce.** ed. by HARTSHORNE, Charles; WEIß, Paul. Cambridge (Mass): Harvard University Press, 1931-1935. v. I-VI. Disponível em: https://colorysemiotica.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/08/peirce-collectedpapers.pdf. Acesso em: 07 abr. 2024.

PIAGET, J. **Abstração Reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Tradução de Fernando Becker Petronilha da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1977-1995.

ROQUE, T. **História da Matemática**: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTANA, G. F. S. S. **A Complementaridade entre sentido e referência dos símbolos da Matemática**. 2019. 180 p. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e em Matemática) — Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 2019. Disponível em: https://ri.ufmt.br/handle/1/3400. Acesso em: 30 out. 2023.

SANTANA, G. F. S.; WIELEWSKI, G. D.; BARROS, L. G. X. de. Estudos brasileiros sobre o princípio da complementaridade na educação matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 11, n. 6, p. 388-408, out. 2020. DOI: https://doi.org/10.26843/rencima.v11i6.1904.

THOM, R. Modern mathematics: does it exist? In: HOWSON, A. G. (ed.). **Developments in Mathematical Education**. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. p. 194-210. https://doi.org/10.1017/CBO9781139013536.011.

Recebido em: 03 de junho de 2023.

Aceito em: 24 de outubro de 2023.