Estudo ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

QUADROS TEÓRICOS DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA PARA ANÁLISE DO SISTEMA DIDÁTICO DE ENSINO E SUAS DIFICULDADES DE IMPLEMENTAÇÃO

THEORETICAL FRAMEWORKS OF MATHEMATICS DIDACTICS FOR THE ANALYSIS OF THE TEACHING DIDACTIC SYSTEM AND ITS IMPLEMENTATION DIFFICULTIES

Marlene Alves Dias[1]

Resumo: Neste estudo, apresentamos opções de quadros teóricos da didática da Matemática francesa, que permitem analisar e compreender as propostas institucionais passadas e presentes, comparando-as de forma a mostrar as lacunas e as dificuldades de implementação de novos sistemas de ensino centrados em documentos construídos por especialistas, sem a participação de professores, educadores e estudantes que são os protagonistas de seu funcionamento e que, em geral, não se sentem atendidos em suas reivindicações. Essa dificuldade de interlocução tende a comprometer o desenvolvimento das propostas nas escolas, como mostramos por meio de exemplos das relações entre o antigo currículo representado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pela Base Nacional Comum Curricular; para isto, apoiamo-nos em conceitos específicos da didática da Matemática francesa. Observamos aqui a necessidade de criar grupos de estudo entre escolas e universidades de modo a auxiliar no desenvolvimento de projetos conjuntos que ajudem a reconstruir o novo sistema didático.

Palavras-chave: Relação institucional e pessoal; Praxeologia; Quadro; Níveis de conhecimento.

Abstract: This study presents options for theoretical frameworks of French mathematics didactics, allowing for the analysis and understanding of past and present institutional proposals. We compare these proposals to reveal the gaps and difficulties in implementing new teaching systems centered on documents created by specialists without the participation of teachers, educators, and students—the key players in their operation—who generally feel their demands are not being met. This lack of dialogue tends to hinder the development of proposals in schools, as demonstrated through examples of the relationship between the old curriculum represented by the National Curriculum Parameters and the National Common Curriculum Base. To illustrate this, we rely on specific concepts from French mathematics didactics. We observe the need to create study groups between schools and universities to assist in the development of joint projects that help reconstruct the new didactic system.

Keywords: Institutional and personal relationships; Praxeology; Framework; Levels of knowledge.

1 Introdução

Atualmente, no Brasil, a legislação que estabelece a organização do sistema educacional brasileiro da Educação Infantil até o Ensino Superior é a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, na sequência LDB, Lei nº 9.394/1996, cuja última atualização deu-se no ano de 2025.

[1] Doutora em Matemática pela Université Diderot (Paris 7) -. Atualmente Université Paris Cité. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Fortaleza, Ceará, Brasil. E-mail: maralvesdias@gmail.com

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

Fazendo uma retrospectiva, no ano de 1997, foi homologado e publicado o Parâmetro Curricular Nacional na sequência PCN do Ensino Fundamental - primeira à quarta série; em 1998, foi homologado o PCN do Ensino Fundamental - quinta à oitava série, cujas diretrizes organizavam o Ensino Fundamental até 2018, mesmo com a alteração da LDB de 2006, que instituiu o Ensino Fundamental em nove anos, incluindo as crianças de seis anos no primeiro ano do Ensino Fundamental. O Ensino Médio já apresentou maiores dificuldades, sendo o primeiro PCN publicado em 2000, no qual já se indicava que o estudo deveria ser organizado segundo a abordagem por competências, mas não havia uma organização em relação aos conteúdos a serem desenvolvidos. Isso provocou dificuldades de implementação, o que conduziu à publicação dos PCN+ no ano de 2002, como complementação para auxiliar na implementação dos PCNs, pois nele se organizavam as competências de Ciências e Matemática a serem desenvolvidas e suas relações com as outras disciplinas. E no ano de 2006, foi publicado o novo documento, Orientações Curriculares para o Ensino Médio, na sequência OCEM, no qual se explicitavam questões apresentadas nos documentos anteriores e se introduziam os conteúdos a serem desenvolvidos, assim como metodologias que poderiam ser trabalhadas com os estudantes.

Após esses 20 anos de PCN para o Ensino Fundamental e 21 anos para o Ensino Médio, foi homologada a BNCC. Esse documento relativo ao Ensino Fundamental foi homologado em 2017 e a BNCC do Ensino Médio, em 2018. Assim, a implementação da BNCC iniciou-se em 2018 e 2019 para o Ensino Fundamental e Ensino Médio respectivamente, sendo interrompida em 2020 em razão da pandemia da SARS-CoV-2 (covid-19). Portanto, podemos considerar que, tanto para o Ensino Fundamental, como para o Ensino Médio, a efetiva implementação deu-se apenas no ano de 2022, há apenas quatro anos de uma nova organização que acontece simultaneamente em todos os anos escolares, o que pode estar ainda acarretando muitas dificuldades aos estudantes em função dos dois anos em que o ensino deu-se de modo irregular por força do isolamento social imposto pela referida pandemia e das mudanças provocadas pela implementação da proposta em todos os anos da Educação Básica. Observamos aqui que, por um lado, é preciso considerar a transição da abordagem por objetivos para a abordagem por competências e, por outro, uma desorganização quanto aos conteúdos a serem desenvolvidos em anos mais avançados, uma vez que foram modificadas as unidades temáticas, como, por exemplo, a introdução da Álgebra nos anos iniciais do Ensino

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

Fundamental e o fato de a distribuição das unidades temáticas do Ensino Médio poder ser feita pelas escolas.

A partir dessa situação, provocada pela mudança de diretrizes com abordagens e características muito diferentes e da situação atípica vivenciada em função da citada pandemia, acreditamos ser necessário desenvolver pesquisas que identifiquem, nos documentos oficiais passados e presentes, assim como nos materiais didáticos e nas macroavaliações, os impactos que podem estar gerando entraves para professores, educadores e estudantes, tanto do ponto de vista da formação inicial e continuada daqueles que precisam adaptar-se às novas demandas, como dos estudantes que muitas vezes têm dificuldades em relacionar novos conhecimentos com conhecimentos supostos disponíveis, mas com os quais, provavelmente, nunca tiveram contato.

Sendo assim, nosso objetivo neste trabalho é apresentar quadros teóricos da didática da Matemática francesa que podem auxiliar no desenvolvimento de pesquisas associadas a essas possíveis dificuldades, para as quais precisamos encontrar meios de mitigar seus efeitos.

Observamos ainda que, no Brasil, atualmente, a organização do sistema de ensino segue a LDB e a organização do sistema didático é apresentada por via da BNCC, que introduz a abordagem por competências especificadas por meio de habilidades. Contudo o documento apresenta apenas uma lista dessas competências, seguida dos objetos de conhecimento e suas respectivas habilidades para os anos escolares em que os conteúdos devem ser desenvolvidos somente para o Ensino Fundamental - anos iniciais e finais. Fica sob a responsabilidade das Secretarias de Educação e das unidades de ensino a escolha da organização dos conteúdos do Ensino Médio, o que indica uma atenção especial a essa etapa escolar, visto que essa nova forma de organização pode prejudicar o ensino de estudantes da Educação Básica, pois eles são dependentes dos pais e, muitas vezes, precisam deslocar-se para outras regiões dentro do próprio estado ou fora dele. Esse problema já era percebido na época dos PCNs, porque a seleção de conteúdos variava em termos de bimestres ou semestres e aqueles que mudavam de escolas, muitas vezes, revisavam alguns conteúdos, mas perdiam outros, o que exigia a identificação do problema e o auxílio dos professores para os casos particulares. Fica evidente que da forma como a BNCC propõe o desenvolvimento dos conteúdos para o Ensino Médio, a situação pode agravar-se.

Esse exemplo bastante geral e simples mostra o interesse de estudos e análises mais complexas relacionados às possíveis propostas de desenvolvimento da Educação

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

Básica nos diferentes documentos destinados para esse fim, como: projetos da Secretarias de Educação, planos de ensino das disciplinas, livros e materiais didáticos indicados e utilizados, proposta didático-metodológica das escolas, macroavaliações, entre outros.

Considerando a problemática retroapresentada, parece-nos importante que educadores e professores disponham de ferramentas didáticas que permitam identificar as dificuldades apresentadas pelos estudantes para o desenvolvimento esperado da Matemática de modo a que possam intervir, considerando a realidade de suas respectivas escolas e turmas.

Para tanto, na sequência, apresentamos algumas ferramentas da didática francesa, com exemplos que podem auxiliar pesquisadores, educadores e professores a melhor compreender as atuais mudanças e assim tratar com maior segurança as dificuldades em desenvolver um trabalho satisfatório que atenda as expectativas institucionais, suas próprias expectativas e a dos seus estudantes.

2 Ferramentas da didática da Matemática francesa para a identificação e possível melhoria da organização didática a ser desenvolvida na Educação Básica

As ferramentas didáticas apresentadas serão definidas a partir de textos originais dos autores e, para os exemplos, optamos por identificar aqueles que são indicados nos documentos oficiais, para os quais apresentamos um breve histórico, considerando os PCNs e a BNCC. A passagem dos PCNs para a BNCC ainda está em curso, o que pode apresentar dificuldades para professores, tendo em vista que 2027 será o primeiro ano em que os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental - anos iniciais serão aqueles que seguiram o novo currículo indicado na BNCC na íntegra. Em função da pandemia já referida, consideramos que a implementação da BNCC para o Ensino fundamental - anos iniciais e finais deu-se efetivamente em 2022. Para o Ensino Médio, a situação é mais complexa e, em razão das dificuldades encontradas desde a sua proposta de implementação em 2019, mudanças estruturais, em particular relacionadas aos itinerários formativos, conduziram à sua real implementação a partir de 2026.

Iniciamos com a ferramenta relação institucional e pessoal que favorece compreender o que podemos esperar dos estudantes em função da proposta institucional e de seu funcionamento.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

2.1 Relação Institucional e Pessoal

As noções de relação institucional e pessoal são definidas por Chevallard (1992) por meio de um modelo quase axiomático que possibilita ponderar sobre as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes, quando se consideram as relações institucionais existentes, o que auxilia a compreender melhor como desenvolver uma determinada noção matemática, em um determinado momento, para um público específico.

O pesquisador inicia introduzindo três termos primitivos, a saber: os objetos O, as pessoas X e as instituições I. Entre os três termos, os objetos O são aqueles que ocupam uma posição privilegiada, pois eles são a “base” da construção teórica, portanto, o autor explicita que, na teoria, *tudo é objeto*, por meio da analogia com a teoria dos conjuntos, onde tudo é conjunto. Logo, as pessoas X e as instituições I, assim como as outras entidades introduzidas na teoria, *são objetos de um tipo particular*.

Para o autor, a existência do objeto O está associada ao momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente. Nesse caso, podemos considerar, como exemplo de objeto, os conceitos de Álgebra indicados na BNCC para os estudantes do Ensino Fundamental - anos iniciais que, ao serem desenvolvidos nas escolas de diferentes formas, estabelecem uma relação da instituição $R_I(O)$ da escola (I) ao objeto Álgebra (O), denominada *relação institucional de I a O*. Da mesma forma, os estudantes (X) dessa escola (I) correspondem às pessoas que reconhecem o objeto Álgebra (O) como existente, estabelecem uma *relação pessoal de X a O*, indicada R(X, O). A partir dessas definições, o pesquisador esclarece que *conhecer um objeto O* é, tanto para uma instituição, como para uma pessoa, ter uma relação com O. Logo, é preciso ficar atento, pois os estudantes das diferentes escolas podem ter relações pessoais que não correspondem ao conhecimento esperado do objeto O, pois dependem das relações institucionais a que foram submetidos; daí a necessidade de uma organização adequada para que os estudantes possam apresentar conhecimentos satisfatórios, quando das avaliações escolares, em particular as macroavaliações.

Assim, os conceitos de relação institucional e relação pessoal são importantes para todos os profissionais da Educação, pois é por meio deles que podemos compreender as dificuldades, tanto dos profissionais da Educação, como dos estudantes e procurar meios de mitigá-las.

Para tanto, consideramos importante analisar e compreender as relações institucionais indicadas nos documentos PCNs e BNCC para entender as mudanças

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

necessárias e ficarmos atentos às dificuldades dos estudantes. Precisamos ainda estudar as propostas institucionais de cada Secretaria de Educação, os materiais didáticos, em particular os livros didáticos que correspondem ao material didático mais utilizado nas escolas brasileiras e as diversas macroavaliações municipais, estaduais, federais e internacionais de maneira a compatibilizar essas relações institucionais com os objetos indicados a fim de auxiliar no desenvolvimento de relações pessoais que sejam compatíveis com os conhecimentos esperados dos estudantes, em particular quando são submetidos a macroavaliações. Este trabalho deve ser constante e, para isto, é imprescindível que os órgãos oficiais disponibilizem os documentos necessários para essas análises, o que nem sempre é o caso.

Ainda nos referindo à Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard e seus colaborados, consideramos o conceito de praxeologia por ele introduzido como essencial para compreender as diferentes relações institucionais que são apresentadas aos estudantes por meio dos materiais didáticos existentes. Observamos aqui a importância desse conceito para diferentes estudos sobre o progresso dos estudantes, em particular para o Ensino Médio, pois nesta etapa escolar, tanto nos PCNs, como na BNCC, não são explicitados conceitos no caso dos PCNs e objetos de conhecimento no caso da BNCC a serem desenvolvidos. Sendo assim, nos parece que os livros didáticos e as propostas das Secretarias de Educação podem nos auxiliar a compreender as diferenças entre os dois documentos e assim organizar as unidades temáticas e as competências a serem desenvolvidas. Este trabalho é fundamental, em particular para o Ensino Médio, pois a BNCC apresenta apenas um conjunto de competências sem especificar o ano a serem trabalhadas, como são os casos do Ensino Fundamental - anos iniciais e finais.

Assim, o estudo das praxeologias desenvolvidas nos materiais escolares, nos livros didáticos e nas macroavaliações podem nos indicar a forma como os currículos podem estar sendo desenvolvidos nas escolas brasileiras e auxiliar a compreender as dificuldades dos estudantes na passagem de uma etapa escolar à outra.

Isso se justifica por meio da explicitação realizada por Chevallard (1998) ao indicar que a TAD situa a atividade matemática, consequentemente, o estudo da Matemática, no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais, o que, segundo o autor, conduz a várias direções e mesmo a ignorar algumas delas. Ainda conforme o autor, falar de legitimidade da didática da Matemática exige que se considerem objetos distintos. Em primeiro lugar, a Matemática e, na sequência, os

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

estudantes, os professores, os livros didáticos, as tecnologias digitais etc., isto é, todos os objetos necessários para tratar das questões a ela associadas.

Assim, segundo o pesquisador, a premissa básica da TAD aceita que toda atividade regular humana pode ser entendida por meio de um modelo único denominado *praxeologia*, que definimos a seguir.

2.2 Praxeologia

Chevallard (1998) define o conceito de *praxeologia* por meio das noções de *tarefa*, *t*, e de *tipo* de tarefas, *T*. Quando uma tarefa *t* está relacionada com um tipo de tarefa *T*, escrevemos: $t \in T$, salientando que, na maioria dos casos, uma tarefa (bem como o tipo de tarefa relacionada) é expressa por um verbo, sendo assim, o autor considera os seguintes exemplos: varrer o cômodo, desenvolver uma expressão literal dada, dividir um inteiro por outro, cumprimentar um vizinho, ler um manual de instruções, subir escadas, integrar a função $x \to x\ln x$ entre $x = 1$ e $x = 2$, etc.

Além disso, Chevallard (1998), por meio de exemplos cotidianos e matemáticos, explicita a noção de tipo de tarefa, isto é, para considerar um tipo de tarefa, é preciso que se tenha um objeto relativamente preciso. Como exemplo, o autor indica: subir escadas é um tipo de tarefa, mas subir simplesmente não é. Do mesmo modo, calcular o valor de uma função em um ponto é um tipo de tarefa, mas calcular somente é o que o autor denomina *gênero* de tarefa, que demanda uma determinação.

Consoante Chevallard (1998), um gênero de tarefas é apresentado sob a forma de diferentes tipos de tarefas, incluindo o conteúdo intimamente relacionado. Calcular... é um *gênero* de tarefas, calcular o valor (exato) de uma expressão numérica contendo um radical é um *tipo de tarefa*, bem como calcular o valor numérico de uma expressão que contém a letra x, quando o valor de x é dado. Durante os anos de estudos de Matemática, o gênero Calcular... é enriquecido com novos tipos de tarefas; será o mesmo da época do Ensino Fundamental, em seguida, os estudantes irão aprender a calcular com vetores, e mais tarde, a calcular uma integral ou uma primitiva e assim por diante. O mesmo ocorre, naturalmente, para os gêneros Demonstrar ..., Construir..., ou Expressar ... em função de ...

Finalmente, o autor conclui que as tarefas, os tipos de tarefas e os gêneros de tarefas não são dados pela natureza: eles são os "artefatos", as "obras", as *construções institucionais*, cuja reconstrução em determinada instituição, por exemplo, em uma

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

classe, é um problema em si, sendo assim objeto de estudo da didática. Após definir tarefa, tipo de tarefa e gênero de tarefas, Chevallard (1998) observa que tratará primeiro a estática das praxeologias, ignorando sua dinâmica e, em particular, sua gênese.

Sendo assim, o autor considera que uma praxeologia relativa a um *tipo de tarefa T* precisa, em princípio, de uma maneira de fazer, de realizar as tarefas de tipo *T*, logo, t $\in T$. Essa maneira de fazer é indicada por τ e denominada técnica (do grego tekhnê, saber-fazer). Assim, uma praxeologia relativa ao tipo de tarefa T contém uma técnica relativa à T. Logo, a praxeologia é composta de um bloco prático-técnico [T, τ], que o autor identifica como um saber-fazer. Dessa forma, saber fazer certo tipo de tarefa T é dispor de certa maneira para realizar as tarefas desse tipo.

O autor observa ainda que, se uma técnica corresponde a uma maneira de fazer, ela só pode ser bem-sucedida para uma parte de tarefas do tipo *T* às quais ela está relacionada, parte que ele denomina de *âmbito* de aplicação da técnica. Portanto, a técnica pode falhar para o complementar $T\backslash\varphi(\tau)$, isto é, não sabemos executar todas as tarefas de tipo *T*.

Como exemplos, o autor considera que qualquer técnica de cálculo para os números naturais falha a partir de certa magnitude desses números e o fato de que não sabemos, em geral, fatorar um número natural dado, principalmente quando essa fatoração depende de certas técnicas criptográficas. Isso o conduz a ressaltar que, muitas vezes, em Matemática, esquecemos que uma mesma técnica não possibilita executar todas as tarefas do mesmo tipo.

Além disso, Chevallard (1998) ressalta que uma técnica pode ser superior à outra, mesmo sobre o tipo de tarefa *T* como um todo ou pelo menos para uma determinada parte de *T*.

Neste momento, antes de tratar da natureza das técnicas, parece-nos interessante apresentar um exemplo de técnica associada a um tipo de tarefa que não corresponde ao desenvolvimento do estudo da função exponencial no Ensino Médio brasileiro, mas que foi objeto do vestibular da FUVEST de 2011. Para tanto, utilizamos a tarefa: *Seja* $f(x) = a + 2b^{x+c}$*, em que a, b e c são números reais. A imagem de f é a semirreta]-1, ∞[e o gráfico de f intercepta os eixos coordenados nos pontos (1,0) e (0, -3/4). Então o produto abc vale: a) 4; b) 2; c) 0; d) -2; e) -4.* (FUVEST, 2011).

O tipo de tarefa T dado nesse exemplo corresponde a identificar a translação da função em relação ao eixo das ordenadas, calcular o valor numérico dos pontos dados e

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

resolver um sistema de equações exponenciais e determinar o valor dos coeficientes de uma função exponencial dada por meio de sua representação algébrica.

Observamos aqui que, se trabalhamos apenas com funções do tipo $f(x) = a^{bx}$, com a= 2, 1/2 , 3 e 1/3*,* dispomos das técnicas necessárias para calcular o valor numérico dos coeficientes b e c da função dada, e das técnicas de cálculo do valor numérico da função e método de solução de sistemas de equações exponenciais, mas determinar o coeficiente *a* por meio da identificação na representação do conjunto imagem sob a forma de intervalo aberto, em geral, é uma técnica que não é tratada no Ensino Médio, assim como a translação da função em relação ao eixo das ordenadas para o caso da função exponencial, o que dificulta determinar a solução da tarefa para aqueles que não dispõem desse conhecimento, mesmo que reconheçam que se trata do conceito de função exponencial estudado no Ensino Médio.

Vale ponderar ainda que Chevallard (1998) aponta que nem toda técnica tem natureza algorítmica ou quase algorítmica, mas, em Matemática, existe uma tendência para a algoritmização, embora dependa do tipo de tarefa normalmente mais complexa.

O exemplo da tarefa da FUVEST– primeira fase (2011) corresponde a um caso em que a técnica não depende apenas dos algoritmos geralmente desenvolvidos no Ensino Médio, mas, nesse caso, é preciso analisar o conjunto imagem, seja esboçando o gráfico da função, seja apenas considerando a translação da função em relação ao eixo das ordenadas e interpretar o conjunto imagem, que é dado por meio de uma representação em intervalos, outra noção pouco trabalhada no Ensino Médio brasileiro. Portanto, não existe uma técnica algorítmica para desenvolver essa parte da tarefa. Observamos ainda que a tarefa pode ser considerada mais complexa justamente por essa necessidade de interpretar as representações da função sem que para isso seja preciso desenvolver cálculos algorítmicos.

Chevallard (1998) enfatiza ainda que, em uma dada instituição, para um determinado tipo de tarefa *T*, é desenvolvida apenas uma técnica ou um número reduzido das mesmas, excluindo algumas alternativas possíveis, mas que podem existir em outras instituições. Certamente o tipo de tarefa da FUVEST – 2011 pode ter sido trabalhado em algumas instituições, mas nos livros didáticos ela só aparece depois do exame vestibular de 2011 e é deixada a cargo dos estudantes, que podem interessar-se e utilizar a internet para ampliar seus conhecimentos, mostrando ainda que esse trabalho pode ser proposto pelo professor como tarefa extraclasse a ser discutida posteriormente em aula.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

Após definir *técnica* como uma maneira de fazer e dar exemplos que mostram que as diferentes técnicas não são algoritmos e dependem dos atores das instituições, Chevallard (1998) introduz a noção de *tecnologia*, denotada por θ, que corresponde a um discurso racional (logos) sobre a técnica (tekhnê - τ). Segundo o autor, esse discurso é focado inicialmente na *justificativa* racional da técnica, de forma a garantir que ela permita que muitos sejam capazes de realizá-la para resolver tarefas de tipo *T*. Essa definição de tecnologia leva o autor a esclarecer que o estilo da racionalidade varia segundo a instituição.

Chevallard admite como fato da observação que em uma instituição *I*, seja qual for o tipo de tarefas *T*, a técnica relativa a *T* está sempre acompanhada de pelo menos um *embrião* ou, mais frequentemente, de um vestígio de tecnologia. Em muitos casos, até mesmo certos elementos tecnológicos são integrados à técnica. O autor destaca ainda que uma segunda função da tecnologia é de explicar, tornar inteligível, esclarecer a técnica. Assim, se a primeira função justificar corresponde a fornecer o que é pretendido, a segunda consiste em explicar por que isso ocorre. Conforme Chevallard (1998), essas duas funções são assumidas de maneira desigual e, em Matemática, a função justificar prevalece tradicionalmente por meio da exigência da demonstração sobre a função explicar. As tecnologias têm ainda uma terceira função que é produzir técnicas.

Como exemplo, o autor considera a aritmética elementar, em que o mesmo discurso tem uma dupla função, técnica e tecnológica, na medida em que permite, tanto *encontrar* o resultado exigido (função da técnica), como *justificar* que este é o resultado esperado (função da tecnológica). Exemplo: Quando alguém diz: “Se 8 pirulitos custam 10 euros, 24 pirulitos, são 3 vezes 8 pirulitos, custarão 3 vezes mais, logo, 3 vezes 10 euros”. Assim, o fato de existir uma técnica canônica, em princípio somente reconhecida e aplicada, confere a essa técnica uma virtude "*autotecnológica*": fazer assim, não exige uma justificativa, uma vez que esta é a maneira correta de fazer na instituição I.

Chevallard (1998) esclarece ainda que o discurso tecnológico contém afirmações mais ou menos explícitas, para as quais podemos perguntar o porquê desse discurso. Isso conduz a um nível superior de justificativa-explicação-produção, que ele denota e denomina teoria Θ, que corresponde ao discurso tecnológico ou à tecnologia da tecnologia.

Isso permite a Chevallard (1998) considerar que, em torno de um tipo de tarefa T, está, em princípio, um trio constituído por uma técnica τ (pelo menos uma), uma tecnologia θ e uma teoria Θ. O todo constitui uma *praxeologia pontual* denotada [T,

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

τ, θ, Θ], isto é, uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa T. Tal praxeologia ou organização praxeológica é constituída de um bloco prático técnico [T, τ] e de um bloco tecnológico-teórico [θ, Θ]. O bloco [θ, Θ] é, normalmente, identificado com um *saber* e o bloco [T, τ] com um *saber fazer*. Segundo o pesquisador, vulgarmente designamos uma praxeologia [T, τ, θ, Θ] inteira ou mesmo parte dela como sendo um saber, o que incentiva a redução do saber fazer e, assim, a produção de divulgação de praxeologias, pois existem tecnologias que esperam ser empregadas pela primeira vez e outras que não são mais utilizadas.

Chevallard (1998) justifica a ênfase dada ao saber, explicitando que raramente encontramos praxeologias pontuais. Geralmente, em uma instituição dada I, uma teoria propicia várias tecnologias, cada uma das quais, por sua vez, justifica e torna inteligível várias técnicas, correspondentes a todos os tipos de tarefas. As organizações pontuais vão então se agregar, primeiramente em organizações locais, centradas em uma determinada tecnologia, em seguida, em organizações regionais, formadas no entorno de uma teoria. As organizações globais são praxeologias complexas obtidas, em uma instituição dada, para agregar as várias organizações regionais correspondentes às várias teorias.

Assim, a passagem de uma praxeologia pontual para uma praxeologia local centra-se na *tecnologia*, da mesma maneira que a subsequente praxeologia regional terá como primeiro plano a *teoria*. Dessa forma, em ambos os casos, a visibilidade do bloco dos saberes aumenta em detrimento daquele do saber-fazer. Tal desequilíbrio, sem dúvida, pode ser justificado porque, em muitos casos, os tipos de tarefas T precedem o bloco teórico, que foi construído como meio para justificar uma técnica relacionada a um tipo de tarefa, mas, estruturalmente, o saber pode gerar uma técnica para um dado tipo de tarefa, o que pode conduzir à apresentação do saber fazer, nos livros didáticos, como uma simples aplicação do saber.

Como exemplos no ensino da Matemática, Chevallard (1998) considera que um tema de estudo é frequentemente identificado com uma determinada *tecnologia*, por exemplo, teorema de Pitágoras, teorema de Tales, ou melhor, implicitamente, com o bloco teórico ou do saber correspondente, pois essa tecnologia torna possível produzir e justificar, por meio de aplicações, as técnicas relativas a vários tipos de tarefas. Convém notar, entretanto, que outros temas de estudo, tais como fatoração e resolução de equações, são expressos tradicionalmente em termos de tipos de tarefas.

Na sequência, apresentamos os conceitos de objetos ostensivos e objetos não ostensivos, visto que são eles que auxiliam a compreender melhor as possíveis relações

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

institucionais e pessoais com os objetos matemáticos em função das diferentes praxeologias empregadas no processo de ensino e aprendizagem.

2.3 Objetos ostensivos e objetos não ostensivos

Iniciamos considerando o exemplo de Chevallard (2007), no qual os sujeitos de determinada instituição I são conduzidos a reconhecer apenas a técnica "escrever a equação dada sob a forma $x = \frac{lnb}{lna}$ e, em seguida, utilizar a calculadora para efetuar a operação indicada", quando precisam resolver equações do tipo $a^x = b$. Segundo o autor, ao utilizar essa técnica, podemos considerar que a relação com o objeto "logaritmo" corresponde apenas à tecla da calculadora que permite efetuar o cálculo, o que conduz à dinâmica cognitiva de dar uma configuração ao cálculo em função do emprego que dele fazemos. Esse tipo de técnica conduz o autor a considerar as noções de objetos ostensivos e objetos não ostensivos, ressaltando que, para o exemplo apresentado, o papel do objeto logaritmo se reconhece em função dos objetos ostensivos manipulados e das regras de manipulação utilizadas, que por sua vez existem por meio dos objetos não ostensivos que as sustentam.

Para melhor compreender essa função de manipulação e das regras que a sustentam, consideramos as definições e exemplos e seu papel na TAD, referindo-nos a Chevallard (1994) e Bosch e Chevallard (1999).

Chevallard (1994), após considerar que, em toda atividade humana, somos chamados a realizar diferentes tipos de tarefas e que para cada uma delas existe uma técnica, coloca-se as seguintes questões: do que é feita uma técnica? De que ingredientes ela é composta? Em que consiste a "execução" de uma técnica?

Esse questionamento o conduz a estabelecer uma distinção fundamental entre dois tipos de objetos: os objetos ostensivos e os objetos não ostensivos.

Assim, o autor define *ostensivos* como sendo os objetos que têm para nós uma forma material, sensível. Exemplos: Um objeto material (uma caneta, um compasso, etc.) é um ostensivo. Os gestos: *ostensivos gestuais*. As palavras, e, mais genericamente, o discurso: *ostensivos discursivos*. Os esquemas, desenhos, grafismos: *ostensivos gráficos.* As escritas e os formalismos: *ostensivos escriturais*.

A característica dos objetos ostensivos é que eles podem ser manipulados. Essa manipulação sendo considerada no sentido amplo, isto é, a manipulação no sentido estrito (compasso, caneta, etc.), mas também pela voz, olhar, etc. Ao contrário dos objetos

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

ostensivos, os objetos *não ostensivos*, que denominamos usualmente de noções, conceitos, ideias etc., não podem ser manipulados, eles só podem ser evocados por meio da manipulação dos ostensivos associados.

Como exemplo dos objetos ostensivos e não ostensivos, Chevallard (1994) utiliza a noção de logaritmo e, por meio da equação exponencial $2^x = 10$, explicita que, na sua solução, utilizamos, tanto objetos ostensivos, como objetos não ostensivos, tal como é possível observar no texto a seguir. Consideramos que, ao dizer que "tomamos o logaritmo dos dois membros", estamos utilizando os ostensivos gestuais, discursivos e escriturais, mas existe também o conceito de logaritmo que é mencionado por meio do objeto não ostensivo escritural ou discursivo, quando esses são disponíveis. Os objetos ostensivos escriturais permitem escrever, por exemplo: $2^x = 10 \leftrightarrow \ln 2^x = \ln 10 \leftrightarrow x \ln 2 = \ln 10 \leftrightarrow x = (\ln 10)/(\ln 2)$. Assim, a técnica para resolver equações da forma $a^x = b$ supõe um sistema de objetos ostensivos conectados e articulados a certo número de objetos não ostensivos (por exemplo: o conceito de logaritmo).

Observamos que, ao mencionar a palavra logaritmo, estamos nos referindo ao objeto não ostensivo, enquanto, ao dizer que "tomamos o logaritmo dos dois membros", trata-se do objeto ostensivo que será aplicado à equação exponencial para desenvolver a técnica que permite resolvê-la. Isso conduz Chevallard (1994) a observar que existe uma dialética necessária entre objetos ostensivos e objetos não ostensivos, pois os objetos ostensivos são *manipulados* por meio de regras, cuja distinção é feita pelos objetos não ostensivos, ao passo que os objetos não ostensivos são *evocados* por meio da manipulação dos objetos ostensivos.

Dessa forma, a resposta para as três questões formuladas inicialmente sobre a composição de uma técnica e como executá-la é que toda *técnica* supõe a ativação de um complexo de objetos, uns *objetos ostensivos*, os que serão manipulados, e outros *objetos não ostensivos*, os que serão evocados. Logo, a manipulação dos objetos ostensivos é regrada com a ajuda dos objetos não ostensivos e estes, inversamente, são evocados com a ajuda dos objetos ostensivos.

Considerando o exemplo sobre logaritmo e a composição das técnicas, Chevallard (1994) ressalta que os *objetos ostensivos discursivos* são essenciais. Em conjunto com os *objetos ostensivos gestuais e gráficos*, eles constituem o material mais primitivo de toda atividade humana.

Chevallard (1994) adverte que a atividade matemática, em geral, conduz a esquecer o papel dos objetos ostensivos, o que corresponde a uma *visão idealista* da

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

atividade humana, pois essa visão leva a considerar os objetos não ostensivos como necessários e essenciais, enquanto os objetos ostensivos seriam apenas contingentes e não essenciais. Por exemplo, o conceito de logaritmo sendo essencial para a solução das equações do tipo $a^x = b$, enquanto a notação ln seria apenas contingente.

Por outro lado, Chevallard (1994) mostra ainda como uma visão materialista da atividade matemática se opõe à visão idealista por meio das noções de objetos ostensivos e objetos não ostensivos, pois a visão materialista significa considerar a atividade matemática como material e, assim, os objetos não ostensivos não poderiam existir sem os objetos ostensivos e nem estes últimos sem os primeiros. Assim, essa mudança de visão da atividade matemática tem consequências imediatas. Como exemplo, Chevallard (1994) considera "o sinal de equivalência, que foi banido do atual ensino secundário (Ensino Médio) francês até um nível relativamente elevado". O motivo para retirá-lo é que os estudantes não compreendem a noção de equivalência e seriam conduzidos apenas a utilizar esse símbolo sem compreendê-lo, o que equivale a uma visão idealista.

Isso conduz Chevallard (1994) a contrapor essa justificativa por meio da dialética entre objetos ostensivos e objetos não ostensivos. Segundo o autor, a ideia subjacente é que convém compreender primeiro ("abstratamente") a noção de equivalência antes de utilizar ("concretamente") o sinal de equivalência. No entanto, inversamente, podemos sustentar que a noção de equivalência e o emprego regrado do sinal de equivalência se *elaboram em conjunto*, em uma dialética na qual o sinal tem um papel tão importante quanto o conceito: a noção de equivalência emerge do emprego, cada vez retificado, do sinal de equivalência.

Chevallard (1994) conclui, afirmando que a "compreensão" de um conceito matemático depende da técnica em que esse conceito é utilizado. Ela depende de todo o sistema de objetos não ostensivos e ostensivos ativados por essa técnica. Como exemplo, ele utiliza a noção de proporcionalidade, porque, em sua opinião, para *compreender* a noção de proporcionalidade, deve-se executar de maneira pertinente pelo menos uma *técnica* de resolução de problemas de proporcionalidade. Além disso, Chevallard (1994) considera que a compreensão de uma noção difere segundo a técnica utilizada. Como exemplo, ele apresenta o seguinte problema de proporcionalidade: *5 balas custam 6 reais. Quanto custarão 7 balas?* Esse problema pode ser resolvido por uma das seguintes técnicas:

Técnica do século XVIII. Temos: 5 : 6 : : 7 : x.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

Técnica do século XX. Temos: f(5) = 6 com f linear. Logo , f(7) = f(7.1) = 7f(1) =7.(1/5) f(5) = (7/5) x 6 = ...

As técnicas mencionadas ativam objetos ostensivos diferentes que, para sua execução, exigem conhecimentos sobre objetos não ostensivos específicos.

Após essa rápida definição de objetos ostensivos e não ostensivos e de mostrar a importância da dialética entre eles, consideramos ainda que esses objetos podem viver em diferentes quadros da Matemática, o que nos conduziu a ressaltar a importância do conceito de quadro e mudança de quadros no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

2.4 A noção de quadro e mudança de quadro

Apresentamos, a seguir, uma breve descrição das noções de quadro e mudança de quadros, conforme definição de Douady (1984,1992), apresentada em sua tese em 1984, em uma perspectiva de teorização didática, baseada em uma análise epistemológica centrada no trabalho do matemático profissional. Isso conduz a autora a colocar em evidência a dualidade dos conceitos matemáticos, os quais, em geral, funcionam como ferramentas implícitas e, em seguida explícitas, da atividade matemática antes de adquirirem o status de objeto e de serem trabalhados como tal, assim como o papel desempenhado pelas *mudanças de quadros* nas atividades e na produção matemática.

Douady (1984, 1992) descreve a noção *ferramenta implícita* como aquela que corresponde a um conceito em elaboração, podendo durar vários anos. Como exemplo, podemos considerar a noção de potenciação e suas propriedades, a qual é desenvolvida no Ensino Fundamental, uma vez que se consideram os conjuntos numéricos em que essa operação é definida, utilizada e ampliada nos Ensinos Médio e Superior, dependendo de suas utilizações.

Douady (1984, 1992) descreve *ferramenta explícita* como aquela que corresponde a um conceito que é utilizado intencionalmente para resolver um problema. Consideramos como exemplo a utilização da noção de potência e suas propriedades para resolver problemas de juros compostos, em que, muitas vezes, utiliza-se a fórmula sem associá-la à noção de função exponencial, como é o caso de sua introdução no oitavo e nono ano do Ensino Fundamental, portanto, trata-se aqui de uma aplicação relacionada ao conceito de operação de potenciação e suas propriedades, sendo usada como ferramenta explícita do trabalho em jogo.

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

Douady (1984, 1992) define ainda *objeto* como componente cultural que ocupa um lugar bem determinado no complexo edifício do saber matemático, sendo reconhecido socialmente. Para Douady, o objeto é matematicamente definido não dependendo de seu uso, o que permite assim a capitalização do saber, não importando qual a utilização que dele se faça. Dessa forma, ele possibilita a extensão do corpo de conhecimentos, o reinvestimento em novos contextos que podem ser distintos do original. Como exemplo de objeto associado à operação de potenciação e suas propriedades, podemos considerá-la como objeto no momento em que, ao definir função exponencial, utilizamos a operação de potenciação e suas propriedades como elemento que permite mostrar a existência da função considerada.

2.4.1 A noção de quadro e mudança de quadros em função da técnica utilizada

Para melhor ilustrar as noções de *ferramenta implícita* e *explícita* e de objeto definidas por Douady, voltamos ao exemplo do vestibular da FUVEST – 2011.

Para solucionar a questão, pode-se determinar que $a = -1$, observando que imagem de f é a semirreta $]-1, \infty[$, isto é, que a reta $y = -1$ é a assíntota horizontal da função dada, para tanto, é necessário dispor de conhecimentos do quadro analítico. Uma vez determinado o valor de a, utiliza-se o quadro algébrico e, após identificar que $f(1) = 0$ e $f(0) = -3/4$, constrói-se um sistema de duas equações exponenciais e determinam-se os valores de b e c. Nesse caso, as noções de intervalo e sua representação geométrica, assíntota horizontal e sistema de equações exponenciais são ferramentas explícitas para solucionar a questão em que a ferramenta implícita função exponencial é dada explicitamente.

Outra técnica para a solução da questão apresentada é representar graficamente os pontos dados, o conjunto imagem e a assíntota horizontal $y= -1$, o que permite determinar o valor de *a,* visualizando o deslocamento da função em relação ao eixo y. Na sequência, utiliza-se a mesma técnica da solução enunciada acima.

Esse exemplo indica a importância, quando se define a função exponencial e suas representações, de se discutir a variação da função com a de seus coeficientes, por meio dos objetos ostensivos algébrico e gráfico, pois é preciso mostrar como o objeto não ostensivo função exponencial varia em relação a outras noções associadas ao conceito geral de função, como é o caso do exemplo do conjunto imagem e sua representação por meio do ostensivo intervalo, que é representado geometricamente pela semirreta $]-1,\infty[$,

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

passando pelo eixo das ordenadas para y = -1 e paralela ao eixo das abscissas, ou seja, uma assíntota horizontal passando por y = -1.

Após elucidar as noções de ferramentas implícitas e explícitas e objeto matemático, Douady (1984, 1992) introduz o conceito de *quadro* definido como um edifício mais amplo que é o saber matemático, uma vez que, segundo a autora, um *quadro* corresponde a um ramo da Matemática, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que lhes são associadas. As imagens mentais são essenciais, pois funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos, mas diferem pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas.

Nos exemplos anteriormente apresentados, observamos que a primeira técnica é desenvolvida diretamente, quando se dispõe de conhecimentos do quadro analítico, mas a segunda técnica, além de não exigir conhecimentos relacionados a esse quadro, possibilita uma melhor visualização da variação da função em relação a todos os seus coeficientes. Nesse caso, a utilização do objeto ostensivo gráfico pode servir de facilitador para a criação das imagens mentais necessárias para melhor compreender a tarefa proposta.

Para a noção de função exponencial, quando esse conteúdo é trabalhado no Ensino Médio, observa-se que, em geral, ele é desenvolvido em pelo menos dois quadros: o quadro da Álgebra e o quadro da análise matemática. O primeiro deles é utilizado, quando a função exponencial é definida por um conjunto formado por pares ordenados e, normalmente, não se utiliza a representação da função por meio de um conjunto de pontos representados entre parênteses, sendo mais comum representá-los por uma tabela, o que facilita a sua representação gráfica em um sistema cartesiano ortogonal. Já, o segundo, ou seja, no quadro da análise matemática, é utilizado quando a função é definida por uma fórmula.

Na sequência, Douady define as *mudanças de quadros*, ressaltando que são atividades constantes no trabalho diário dos matemáticos. Segundo Douady (1992), mudar de quadro é um meio para se obterem formulações diferentes de um problema, que podem ou não ser equivalentes, mas que possibilitam um novo acesso às dificuldades encontradas e permitem utilizar novas ferramentas e técnicas que não eram adequadas para a formulação inicial. As traduções de um quadro em outro terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, tornando possível a criação de novos

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

objetos matemáticos, enriquecendo, tanto o quadro original, como os quadros auxiliares de trabalho.

Considerando o exemplo FUVEST (2011), observamos que, na primeira técnica para determinar o valor de *a,* usamos apenas conhecimentos associados ao quadro analítico, enquanto, para a segunda, apesar de a tarefa ter sido enunciada no quadro analítico, recorremos ao quadro algébrico por meio da representação gráfica do conjunto imagem da função e de dois de seus pontos. Visualizamos sua forma e podemos, então, determinar o valor de *a* por meio da aproximação da reta $y = -1$, sem utilizar a noção de assíntota horizontal, que poderá ser introduzida a partir da interpretação do gráfico encontrado.

Douady, ao transpor as características do trabalho dos matemáticos para o domínio da didática, define as *mudanças de quadro,* denominando-as *jogos de quadros*. Nesse momento, a autora enfatiza a questão da dialética entre as noções de ferramenta e objeto, pois, para Douady, os *jogos de quadros*, organizados pelos professores, são transposições didáticas das mudanças de quadros e são vistos na teoria como meios privilegiados para suscitar desequilíbrios cognitivos e permitir a ultrapassagem desses desequilíbrios em um novo equilíbrio de nível superior.

Voltamos ao exemplo FUVEST (2011), que pode ser utilizado pelos professores para constituir um *jogo de quadros* e introduzir a noção de assíntota horizontal, que funciona como ferramenta para a determinação de *a*. Esta tarefa pode servir para mostrar a relação entre os conhecimentos adquiridos no Ensino Médio que serão ampliados no Ensino Superior, e o papel facilitador dessa abordagem para o trabalho matemático, mas também propicia revisitar noções, conceitos e ideias desenvolvidas no Ensino Médio que ainda podem servir de suporte para o estudo de Matemática.

Assim, a noção de quadro é centrada no fato de que uma mesma noção pode funcionar em diferentes ambientes conceituais e técnicos e que ela pode apresentar características específicas para cada um desses ambientes, sendo as diferenças existentes um dos motores da criação matemática.

No caso da noção de função exponencial, a sua introdução no Ensino Médio geralmente é feita via exemplos numéricos contextualizados por meio de dobraduras de um retângulo, da meia vida de substâncias radioativas, pelo desenvolvimento de uma cultura de bactérias ou pela determinação de juros compostos, servindo apenas como motivadores deste estudo. Já, no Ensino Superior, por ser tratada no quadro analítico, ela

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

funciona como exemplo para o estudo de noções e exemplos associados às noções de derivada e integral de uma função dada.

Douady considera ainda a *dialética ferramenta-objeto,* que corresponde a um processo cíclico que organiza as funções do professor e dos estudantes, pois nesse caso, os conceitos matemáticos podem desempenhar o papel de ferramenta para resolver um problema, como é o caso da função exponencial, quando utilizada, por exemplo, para resolver problemas de Geometria, Matemática financeira, progressões geométricas ou pode ser aplicada em Física, Biologia ou em outro quadro, ou de objeto, quando definimos a função exponencial. Assim, podemos considerar suas propriedades, teoremas e representações, proporcionando a construção e ampliação do saber matemático.

Na dialética ferramenta-objeto, em determinado momento, certo conceito matemático é *objeto* de estudo e, em outro, ele é utilizado como *ferramenta explícita* na construção de um novo conceito. Por exemplo, se o *objet*o função exponencial é conhecido dos estudantes, ele poderá ser utilizado como *ferramenta explícita* na introdução da noção de progressão geométrica ou de juros compostos.

É importante observar que, para Douady (1992), o objeto matemático e suas representações se confundem, mas é preciso reconhecer que diferentes representações apontam para um mesmo objeto e, apenas ao se articularem essas diferentes representações, é que se pode obter uma melhor concepção do objeto em questão, o que indica coerência entre a noção de objeto matemático e suas representações definidos por Douady e o conceito de objetos ostensivos e não ostensivos de Chevallard, ressaltando que, nos dois casos, os autores observam a questão da dialética entre eles.

Observamos que o desenvolvimento das praxeologias depende dos quadros em que são desenvolvidas e dos objetos ostensivos e não ostensivos considerados, pois são eles que possibilitam a definição, a aplicação e a ampliação dos saberes e conhecimentos matemáticos, lembrando que o saber é institucional e o conhecimento pessoal.

Para melhor compreender as possibilidades de difusão das praxeologias matemáticas no processo de ensino e aprendizagem, lembramos que essa difusão depende dos quadros e técnicas escolhidas para serem desenvolvidos no processo de ensino e aprendizagem, o que conduz a considerar os conceitos de níveis de conceituação e níveis de conhecimento esperados dos estudantes, conforme definição de Robert (1997, 1998).

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

2.5 Níveis de conceituação e níveis de conhecimento esperados dos estudantes

Abordamos aqui os conceitos de níveis de conceituação e níveis de conhecimento esperados dos estudantes introduzidos por Robert (1997, 1998), pois eles nos permitem compreender melhor o que podemos escolher, quando da introdução ou ampliação de um conceito matemático e suas propriedades e aplicações em função dos conhecimentos que os estudantes desenvolveram anteriormente.

2.5.1 Níveis de conceituação

Robert (1997) define *níveis de conceituação* como uma determinada fase em um campo de conhecimentos matemáticos (campo conceitual segundo Vergnaud [1991]) correspondendo a uma organização coerente de uma parte do campo, caracterizada por objetos matemáticos apresentados de certa maneira, dos teoremas sobre esses objetos, dos métodos associados a esses teoremas e dos problemas que os estudantes podem resolver com os teoremas do nível considerado e utilizando os métodos propostos para serem trabalhados em uma determinada etapa escolar.

Observamos aqui que o conceito de *campo conceitual* corresponde ao definido por Vergnaud (1991), a saber: A noção de *campo conceitual* é definida pelo autor como um conjunto de situações cujo domínio requer um determinado sistema de conceitos, procedimentos e representações simbólicas em estreita conexão, ou seja, um conceito funciona em uma variedade de situações e, em uma dada situação, vários conceitos estão em jogo, o que leva à rejeição do estudo de conceitos isolados, identificados com um tipo de situação.

2.5.2 Os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes

O conceito de *níveis de conhecimento esperado dos estudantes* auxilia-nos a compreender melhor como desenvolver os saberes matemáticos em uma determinada etapa escolar em função dos conhecimentos que os estudantes podem ter desenvolvidos até o momento de introduzi-los ou ampliá-los.

Para tanto, Robert (1997, 1998) introduz o conceito de os *três níveis de conhecimento esperados dos estudantes*, a saber:

O *nível técnico* corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

tarefa. Exemplos: *1) Usando o diagrama da árvore, obter todos os arranjos dos elementos de M={a,b,c,d} tomados dois a dois. 2) Esboçar o gráfico da função f: IR → IR tal que* $f(x) = 3x^2 + 2$.

O *nível mobilizável* corresponde a um início de justaposição de saberes de um certo domínio, podendo até corresponder a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O caráter ferramenta e objeto do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido. Se um saber é identificado, ele é considerado mobilizado se acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente.

Exemplos: *1) Lançamos dois dados honestos, um vermelho e um azul. Determine: O universo desta prova. b) Descreva o evento A: "Nos dois dados saem os mesmos números". E calcule a sua probabilidade. 2) Esboçar o gráfico da função* $f(x) = x + 1$ *e determinar seus coeficientes linear e angular.*

Nos exemplos aqui considerados; o *trabalho a ser realizado é pedido explicitamente*, logo, basta o estudante reconhecer a noção em jogo e mobilizar os conhecimentos necessários relativos a essa noção para resolver a tarefa proposta.

O *nível disponível* corresponde a saber responder corretamente o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou criar), mudar de quadro (fazer relações), aplicar métodos não previstos. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que as conhece (servem de terreno de experimentação), ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Pode funcionar para um único problema ou possibilitando fazer resumos. Exemplos: *1) Sobre um quadriculado, consideramos os dois pontos O(0,0) e A(n,m). Enumerar trajetórias (caminhos) de O até A. 2) Dada a representação gráfica de uma função, determinar sua lei de formação.*

3 Algumas considerações

A escolha dos quadros teóricos da Didática da Matemática francesa já apresentados não é aleatória, pois consideramos importante que, tanto para propor pesquisas ou para os professores construírem suas aulas, é preciso que se identifiquem os saberes que são indicados para serem desenvolvidos, tanto na Educação Básica, como no Ensino Superior para que seja possível adequar aos conhecimentos dos estudantes das diferentes turmas e etapas escolares em que o trabalho, seja do pesquisador ou do professor, será desenvolvido.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

Ressaltamos que as relações institucionais e pessoais dependem das propostas das diferentes instituições e que, para tal, a forma de análise proposta por Chevallard e seus colaboradores ajuda-nos a identificar o quê e como se deseja desenvolver determinado conteúdo matemático.

Atualmente nos parece importante estudar as diferenças e semelhanças entre os PCNs e a BNCC de forma a melhor compreender como reorganizar materiais didáticos, formações iniciais e continuadas de professores visando identificar saberes que precisam ser tratados de maneira a colocar em prática novos métodos e estratégias que permitam que os estudantes sejam capazes de atingir as expectativas institucionais. Não podemos ficar justificando as dificuldades dos estudantes nas avaliações apenas no trabalho dos professores, pois os docentes têm pouco acesso às tarefas propostas nas avaliações, em particular em relação às provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica SAEB e do Programa Internacional de Avaliação de Alunos PISA.

Sendo assim, afigura-nos importante que essas avaliações sejam trabalhadas em conjunto com professores das escolas e pesquisadores das áreas de educação e ensino, pois como mostramos, a BNCC nos traz uma mudança radical ao passar da abordagem por objetivos para a abordagem por competências.

Em relação à abordagem por competências, parece-nos importante aqui considerar a advertência de Vergnaud (2010) sobre as perspectivas da Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico OCDE sobre a aquisição e utilização de competências, pois, segundo o pesquisador, reconhecer o desafio do desenvolvimento de competências é essencial, tanto para a educação, como para o trabalho, mas para isso é preciso dispor de um referencial teórico para pensar essa questão e organizar metodologias de pesquisa que auxiliem educadores e gestores a encontrarem diferentes meios para auxiliar os indivíduos a desenvolvê-las, tanto em ambiente escolar, como em ambiente profissional, ou seja, precisamos tratar de forma mais científica a questão, posto que esta mudança precisa ser estudada e trabalhada em conjunto com os diferentes atores do sistema educativo.

Este trabalho de estudo e desenvolvimento de um referencial teórico e metodologias que permitam tratar a questão da aquisição e utilização de competências nos indica que, além de compreender melhor a passagem da abordagem por objetivos para a abordagem por competência, precisamos estudar e analisar diferentes tipos de materiais didáticos que são utilizados nas escolas, em particular os livros didáticos que são os mais utilizados pelos professores.

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

Para isto, consideramos importante identificar e comparar as praxeologias propostas nesses materiais e se realmente elas apresentam algo de novo em relação ao que se fazia anteriormente. Assim, identificar os objetos ostensivos e não ostensivos, quadros, suas articulações e mudanças de quadros, assim como o nível de conhecimento em que os conceitos matemáticos eram e estão atualmente sendo propostos para serem desenvolvidos e ampliados, parece-nos fundamental, mas é preciso criar grupos de pesquisadores e professores da Educação Básica e do Ensino Superior que adquiram o habito de questionar e realizar este trabalho.

Acreditamos que este trabalho precisa ser realizado com grupos em que participem pesquisadores, professores e educadores das diferentes etapas escolares para que se reúnam e troquem suas experiências, o que nos parece o meio mais adequado para melhorar a organização didática escolar.

Consideramos ainda que o bom funcionamento desses grupos de estudo pode auxiliar na organização didática escolar, desde que sejam constituídos por pesquisadores da área e de áreas afins, professores e educadores da área e de áreas afins e estudantes de graduação e pós-graduação também da área e áreas afins para que, em conjunto, encontrem novos meios de tornar possível colocar em prática a abordagem por competências. Isto nos mostra a importância e a urgência da integração entre os educadores e professores das escolas da Educação Básica e os pesquisadores e estudantes de graduação e pós-graduação das áreas de Educação e Ensino, pois já se passaram pelo menos quatro anos da implementação da BNCC, se consideramos o início em 2022, e as dificuldades são observadas diariamente, mas pouco tem sido feito para tratá-las, sendo o caso do Ensino Médio ainda mais complicado, pois as mudanças reais terão início apenas em 2026.

Acreditamos que as ferramentas apresentadas neste trabalho podem contribuir para que pesquisadores encontrem e proponham novos meios para o desenvolvimento dos saberes matemáticos junto aos estudantes da Educação Básica, mas este trabalho não pode ficar apenas no campo da pesquisa. É preciso que os diferentes atores da Educação reflitam a respeito e discutam entre si grupos para que sejam encontrados meios de colocar em prática e avaliar novas metodologias, mas, para isso, é fundamental o apoio das instituições de ensino de todos os níveis e que essas instituições valorizem o trabalho de seus membros e considerem a importância dessa nova forma de trabalho, criando oportunidades para a realização dos encontros necessários.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

4 Um esboço de conclusão

A situação atual do ensino em todas as etapas da escolaridade brasileira parece não atender às expectativas, em particular as expectativas internacionais, principalmente no que se refere à Educação Básica. A situação parece-nos associada à falta de organização institucional ao se proporem novos currículos, com a baixa participação dos professores e sem uma real articulação entre os diferentes estados da federação.

Esta breve apresentação de alguns quadros teóricos que podem auxiliar na identificação e proposta de uma melhor organização didática, com breves exemplos do funcionamento desses quadros, consiste apenas em um alerta quanto às possibilidades de melhor integrar pesquisa e ensino, ou seja, pesquisadores, educadores e professores, pois este trabalho precisa ser realizado e discutido, com reflexões em conjunto e, quando possível, com toda a comunidade escolar da Educação Básica ao Ensino Superior.

Ressaltamos que os quadros teóricos da didática apresentados neste trabalho podem ser tratados em outras disciplinas, o que parece importante para que se desenvolvam pesquisas em que se articulam conhecimentos que possam servir, tanto para os estudantes que pretendem seguir seus estudos, como para aqueles que pretendem dedicar-se ao mercado de trabalho, o que corresponde às expectativas da implementação dos itinerários formativos que podem ser meios de motivar os estudantes a se dedicarem mais especificamente às suas pretensões futuras.

Não podemos nos acomodar à situação atual, uma vez que dispomos de pessoal qualificado em todas as áreas do conhecimento e de trabalhos de pesquisadores, educadores e professores que podem dar grande contribuição para a melhoria das condições de ensino e aprendizagem no País, mas, para isto, é preciso vontade política para escutar o conjunto das instituições de ensino e seus membros, pois a implementação de currículos que estão distantes da sociedade, da comunidade e principalmente dos professores tende ao fracasso.

Para melhor justificar nosso esboço de conclusão, apresentamos a escala de níveis de codetermianação definida por Chevallard (2007), considerando os diferentes atores e a baixa participação de estudantes, professores e pesquisadores nos níveis mais altos da escala, quando consideramos a participação voluntária do Brasil no Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA).

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

Quadro 1: A avaliação internacional PISA e sua relação com a organização didática escolar

Níveis de codeterminação	Objeto associado	Responsáveis pelo nível
Humanidade	Melhorar a educação e o desenvolvimento econômico	OCDE e política dos diferentes países
Civilização	Ocidental e Oriental	OCDE e política dos diferentes países
Sociedade	Todos os habitantes de um mesmo país	Política, Recursos Humanos da Educação
Escola	Educação formal e não formal	Formal: Política*, Noosfera disciplinar, profissionais da educação e professor.* Não formal: Política
Pedagogia	Novas propostas de desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem	Política, Noosfera disciplinar reduzida, *Profissionais da educação e professor*
Disciplina	Português, Matemática, História, Ciências........(todas)	Política, Noosfera disciplinar reduzida, *profissionais da educação e professor*
Domínio	Matemática: Funções por exemplo	Noosfera disciplinar e *Professor*
Setor	Função exponencial	Noosfera disciplinar e *Professor*
Temas	Crescimento e Decrescimento	Noosfera disciplinar, Professor, *estudantes*
Tópicos	Representação gráfica	Noosfera disciplinar, Professor e estudantes.

Fonte: O autor

No quadro acima a noosfera disciplinar, os profissionais da educação, professores e estudantes estão grafados em itálico para justificar os níveis que deveriam participar, mas que estão ausentes.

Para melhor compreender o quadro acima, apresentamos a seguir a definição de noosfera disciplinar segundo Chevallard (1982, p. 9).

> *Noosfera disciplinar*: Esfera onde pensamos, segundo modalidades algumas vezes muito diferentes, o funcionamento do sistema didático. Assim, na noosfera os representantes do sistema de ensino, mandatados ou não (do presidente de uma associação de ensino ao professor militante), encontram diretamente ou não (pelo libelo denunciador, pelo pedido ameaçador, pelo projeto transacional, ou pelos debates ensurdecidos de uma comissão ministerial), os representantes da sociedade (os pais dos alunos, os especialistas da disciplina que militam em torno de seu ensino, os emissários do corpo político).

Consideramos que a baixa participação da noosfera disciplinar na escala superior dos níveis de codeterminação, iniciada apenas no nível pedagogia, acaba deixando de fora o debate político desses representantes sobre as reais reivindicações e necessidades da sociedade. Parece-nos ainda mais comprometedora a participação de professores e estudantes, que são os que colocam em prática as exigências institucionais, pois estão inseridos apenas nos níveis mais baixos, ou seja, o professor desde o nível tema e os estudantes apenas no nível tópicos.

Acreditamos que essa situação precisa ser reavaliada, considerando a participação nos níveis superiores da escala da noosfera disciplinar, profissionais da educação,

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

professores e estudantes (indicados em vermelho no quadro), mas para isso, é preciso que esses representantes tenham momentos anteriores de reflexão por meio de trabalhos conjuntos com objetivos específicos, como o grupo aqui considerado, que pode ser o motor para a efetiva implementação de novas propostas de ensino como as indicadas nos documentos PCNs e BNCC.

Referências

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude etproblématique. **Recherches en Didactique des mathématiques**, Paris, v. 19, n. 1, p. 77-123, 1999. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf . Acesso em: 18 out. 2025.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Lei de Diretrizes e Bases**. Brasília, 2025. Disponível em: https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/686350/lei_diretrizes_bases_educacao_nacional_8ed.pdf?sequence=1&isAllowed=y . Acesso em: 17 out. 2025.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Lei de Diretrizes e Bases**. Brasília, 1996. Disponível em: https://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf. Acesso em: 17 out. 2025.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/pnld/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12640-parametros-curriculares-nacionais-1o-a-4o-series. Acesso em: 25 out. 2025.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos. Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf. Acesso em: 22 out. 2025.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília, 2000. Disponível em: file:///C:/Users/maral/Downloads/PCN%20Bases%20Legais%20(1).pdf . Acesso em: 30 out. 2025.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais +. Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002. Disponível em: http://www.basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pcn/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 28 out. 2023.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **As Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf#:~:text=A%20Secretaria%20de%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20B%C3%A1sica%2C%20por%20interm%C3%A9dio%20do,re%EF%AC%82%20ex%C3%B5es%20que%20alimente%20a%20sua%20pr%C3%A1tica%20docente. Acesso em: 30 out. 2025.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em:

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 30 out. 2025.

CHEVALLARD, Y. **Pourquoi la transposition didactique**? Communication au *Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques* de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble. Paru dans les *Actes* de l'année 1981-1982, pp. 167-194, 1982. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=103 Acesso em: 21 de out. 2025.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble, v.12, n.1, p. 73-112, 1992. Disponível em: https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/. Acesso em: 10 out. 2025.

CHEVALLARD, Y. **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique**. Intervention au Séminaire de l'*Associazione Mathesis* (Turin, 3 février 1994). Texte paru dans les *Actes* du Séminaire pour l'année 1993-1994, 1994. p. 190-200. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125 Acesso em: 10 out. 2025.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques**: l'approche anthropologique. Cours donné à l'université d'été *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques*, La Rochelle, 4-11 juillet 1998; paru dans les actes de cette université d'été, IREM de Clermont-Ferrand, 1998. p. 91-120. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27 Acesso em: 10 out. 2025.

CHEVALLARD, Y. **Un concept en émergence**: la dialectique des médias et des milleux. Communication au Séminaire national de didactique des mathématiques le 23 mars 2007. Paru in G. Gueudet & Y. Matheron (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2007*, ARDM et IREM de Paris 7, Paris, 2007. p. 344-366. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_Sem_nat_DDM_-_23_mars_2007.pdf Acesso em: 13 de out. 2025.

DOUADY, R. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques**. 1984, v.1, 341 páginas. Tese de doutorado d'état, Universidade Paris VII, Paris, 1984. Disponível em: https://theses.hal.science/tel-01250665 Acesso em: 12 out. 2025.

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. **Repères, IREM**, Grenoble, v. 6, p.132-158, jan. 1992. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/iwr92031_1702755070480-pdf. Acesso em: 12 out. de 2025.

FUVEST – 2011. Acervo – Vestibular USP, 2011. Disponível em: https://www.fuvest.br/acervo-vestibular-2011/ Prova primeira fase: https://www.fuvest.br/wp-content/uploads/fuvest_2011_1fase_prova_V.pdf Acesso em: 15 out. 2025.

ROBERT, A. Ferramentas de análise dos conteúdos matemáticos a ensinar. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 18, n. 2, p.139-190, 1998. Disponível em: https://hal.science/hal-01809685v1. Acesso em: 10 out. 2025.

ROBERT, A. **Quelques outils d'analyse épistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université**. In: IX ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 9, Houlgate. **Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques**. Houlgate: Association pour la recherche en Didactique des Mathématiques. Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques, p. 192 – 212. 1997.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2026.v.14.n.41.1678

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble, v.10, n. 2, p.133-170, 1991. Disponível em : https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud_1990_theorie-champs-conceptuels_recherche-didactique-mathematiques-10-2-3.pdf . Acesso em: 11 out. de 2025

VERGNAUD, G. **La forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance.** Conférence prononcée à l'Université d'Aracaju à l'invitation de Bernard Charlot, Aracaju, 2010. Disponível em: https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud_2010_forme-operatoire-predicative_conference-Aracaju.pdf . Acesso em: 15 set. 2025

Recebido em: 17 de novembro de 2025.

Aceito em: 02 de fevereiro de 2026.