ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

AS IDEIAS FUNDANTES DO TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL: UMA ANÁLISE FENOMENOLÓGICA

THE FOUNDATIONAL IDEAS IN GÖDEL'S INCOMPLETENESS THEOREM: A PHENOMENOLOGICAL ANALYSIS

Rosemeire de Fatima Batistela[1]
Ana Maria Mota Pereira Silva[2]

Resumo: Este artigo investiga as ideias intuitivas que fundamentam a abordagem e a demonstração do teorema de Gödel, articulando a Fenomenologia de Husserl com a prática matemática. Norteada pela pergunta "Que ideias fundantes são detectadas na abordagem e na estratégia demonstrativa do teorema?", a análise concentra-se: (i) nas decisões filosóficas subjacentes à aritmetização da metamatemática e à construção de proposições verdadeiras indemonstráveis; e (ii) nos elementos-chave da estratégia, como a bijeção metamatemática-aritmética, a numeração de Gödel, a codificação simbólica unívoca e a autorreferência. Argumentamos que Gödel parte de uma intuição platônica sobre a existência de verdades matemáticas irredutíveis à formalização, o que o levou a construir proposições indecidíveis. Este estudo resgata a dimensão intuitiva como fundamento epistemológico, oferecendo contribuições à Educação Matemática ao apresentar alternativas às reduções formalistas ou estruturalistas no Ensino Superior.

Palavras-chave: Intuição de essência (*Wesensschau*); Teorema da incompletude; Fenomenologia Husserliana; Formalização matemática; Educação Matemática.

Abstract: This paper investigates the intuitive ideas that underpin the approach and proof of Gödel's incompleteness theorem, articulating Husserlian phenomenology with mathematical practice. Guided by the central question "What foundational ideas are detected in the approach and demonstrative strategy of the theorem?", the analysis focuses on: (i) the philosophical decisions underlying the arithmetization of metamathematics and the construction of true yet unprovable propositions; and (ii) the key elements of the strategy, such as the metamathematical-arithmetical bijection, Gödel numbering, univocal symbolic encoding, and self-reference. We argue that Gödel starts from a Platonic intuition about the existence of mathematical truths irreducible to formalization, which led him to construct undecidable propositions. This study rescues the intuitive dimension as an epistemological foundation, offering contributions to Mathematics Education by presenting alternatives to formalist or structuralist reductions in Higher Education.

Keywords: Intuition of essences (*Wesensschau*); Incompleteness theorem; Husserlian phenomenology; Mathematical formalization; Mathematics Education.

1 Introdução

Neste artigo, apresentamos uma pesquisa que realizou uma filosofia fenomenológica da produção do conhecimento matemático, focada na dialética intuição e formalização, junto ao teorema de Gödel, e foi norteada pela pergunta diretriz: "No

[1] Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de Rio Claro (UNESP). Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Feira de Santana, Bahia, Brasil. E-mail: rosebatistela@uefs.br
[2] Licencianda em Matemática, Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Feira de Santana, Bahia, Brasil. E-mail: anamariamotaps16@gmail.com

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

teorema da incompletude de Gödel, que ideias fundantes são detectadas na abordagem adotada e na estratégia demonstrativa?" Para respondê-la, integramos duas perspectivas: (i) uma investigação bibliográfica sobre os *insights* que orientaram Gödel em suas decisões no que tange às ferramentas e à perspectiva escolhida e (ii) uma análise imanente à demonstração, sob a perspectiva fenomenológica, buscando desvelar as condições de possibilidade (Husserl, 2006) que fundamentam sua estratégia formal. Nosso pressuposto central é que a demonstração do teorema de Gödel é um resultado formal, mas deriva de intuições de essência, conforme a filosofia Husserliana, que assegura a evidência última dos objetos ideais.

Por intuição de essência (*Wesensschau*), compreendemos, na esteira de Husserl, o ato cognitivo da consciência transcendental que apreende as estruturas invariantes e necessárias de um objeto ideal, revelando sua constituição ontológica. Embora a Fenomenologia Husserliana reconheça outras formas de intuição (sensível, categorial, eidética), este artigo focaliza a intuição de essência, pois ela é decisiva para a fundamentação das ciências formais. Como Husserl (2006) demonstra, é através da *Wesensschau* que se acessam as estruturas invariantes que garantem a objetividade da Matemática e a crítica à formalização desenraizada.

No teorema de Gödel, essa noção se concretiza na visão clara de que a verdade matemática transcende a demonstrabilidade formal, radicando-se em camadas pré-reflexivas de sentido. Compreender esse vínculo entre intuição e formalização é crucial para superar reducionismos que dissociam sistemas axiomáticos de sua base intuitiva. Na prática, essa consciência transcendental se manifesta quando o sujeito, por exemplo, Gödel, reconhece, para além dos símbolos, que "esta sentença é indemonstrável", mesmo que o sistema formal não a capte.

A relevância desta pesquisa reside no resgate da dimensão intuitiva como fundamento epistemológico da Matemática, frequentemente obscurecida por abordagens excessivamente formalistas ou estruturalistas. O teorema da incompletude de Gödel, enquanto objeto de análise, oferece um campo fértil para essa investigação, pois sua demonstração não apenas limita sistemas axiomáticos, mas revela a necessidade de um substrato intuitivo anterior à formalização, uma *Wesensschau*, nos termos Husserlianos.

Para a Educação Matemática, esse resgate é uma tarefa urgente, conforme Batistela e Bicudo (2023) explicam: ao trabalhar matemática e filosoficamente com este teorema, busca-se evitar que os licenciandos reduzam a Matemática a um jogo sintático de símbolos, sem compreender as ideias fundantes que a movem enquanto ciência do

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

mundo Ocidental. Trata-se, assim, de articular a metamatemática ao encadeamento lógico das teorias, às motivações ontológicas dos objetos e, sobretudo, às intuições (enquanto evidências originárias, nos termos de Husserl) que impulsionaram Gödel, permitindo que os futuros professores transcendam visões fragmentadas e aprendam a Matemática como uma construção, em que verdade e demonstrabilidade não se confundem.

Assim, esta pesquisa não apenas ilumina aspectos filosóficos do teorema, mas oferece à Educação Matemática um caminho para repensar o ensino de conteúdos avançados, integrando história, filosofia e epistemologia na sala de aula de cursos de graduação.

Essa articulação entre intuição e formalização é possível porque, como assegura Husserl (2006), a produção do conhecimento matemático emerge da experiência intuitiva, que antecede e fundamenta a linguagem formal. Para o matemático, a produção do conhecimento matemático inicia-se na experiência intuitiva, que é analisada em suas estruturas essenciais, categorizada e, só então, formalizada em linguagem rigorosa.

A formalização, nesse sentido, não é mera codificação de intuições, mas, na constituição do objeto matemático, entrelaçam-se propriedades que ajudam a constituir a realidade do objeto (Bortolete, 2024). Esta, embora derivada da intuição, exige uma validação apofântica: análise crítica das relações entre formas conceituais. Como ressalta (Husserl, 2006, p. 180 *apud* Bortolete, 2024, p. 171), é o "recurso à clareza intuitiva" que garante o lastro último do conhecimento matemático.

Esta pesquisa mostra-se relevante, na medida em que, ao realizarmos uma análise fenomenológica do teorema da incompletude, estamos estudando a produção matemática. Seguindo o modo Husserliano de análise, realizamos um exame do que os matemáticos fazem. Isso é diferente do que os matemáticos dizem que fazem ou do que os filósofos entendem que os matemáticos deveriam fazer. Buscamos extrair dessas análises contribuições para a compreensão da produção do conhecimento matemático. Compreendemos que as ideias intuitivas que guiaram Gödel na abordagem foram fundamentais, como consequência de seu entendimento de que as verdades matemáticas transcendem a mera manipulação sintática, bem como de sua experiência e habilidade com o ferramental matemático.

Do ponto de vista filosófico, é amplamente conhecido que Gödel foi um filósofo realista, que acreditava em verdades independentes de demonstração. Isso o direcionou a estruturar uma prova que não apenas limitava os sistemas formais, mas também revelava a existência objetiva de proposições além do alcance axiomático. Essa intuição — de que

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

verdade e demonstrabilidade eram distintas — se opunha ao entendimento de David Hilbert.

A articulação lógica para a formalização da demonstração de Gödel contou com sua expertise em demonstrar que a metamatemática poderia ser mapeada na aritmética e com sua perícia em perceber que a abordagem baseada em combinações finitas de símbolos não funcionaria. Assim, adotou a direção oposta das inúmeras tentativas de provar diretamente a consistência dos axiomas da aritmética. Gödel articulou *insights* fundamentais em três estratégias: (i) a aritmetização da metamatemática (convertendo afirmações lógicas em proposições aritméticas), (ii) a construção de sentenças autorreferentes (purificadas de paradoxos) e (iii) a elaboração de um indecidível (que encapsula, sintaticamente, verdades inacessíveis aos axiomas).

Neste estudo, assumimos a Fenomenologia Husserliana como método, aplicando a redução eidética para desvelar as intuições de essência que orientaram Gödel. Nosso foco é a constituição intencional do conhecimento matemático, desde as camadas pré-reflexivas até a sua formalização.

Além desta Seção 1, de introdução, este artigo organiza-se da seguinte forma: na Seção 2, fundamentamos o conceito de intuição de essência na Fenomenologia Husserliana; na Seção 3, aplicamos essa noção à produção do conhecimento matemático; nas Seções 4 e 5, analisamos, respectivamente, as intuições subjacentes à abordagem e à demonstração do teorema de Gödel, evidenciando seu papel na ruptura com o programa hilbertiano.

2 Sobre intuição de essência na Fenomenologia Husserliana

Neste tópico, apresentamos como as limitações do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo podem ter influenciado Husserl a fundamentar a Matemática na intuição de essência.

Na crise dos fundamentos da Matemática, o Logicismo e o Formalismo buscavam eliminar a intuição como fundamento último da Matemática. O primeiro empenhou-se em substitui-la pela redução à lógica, dispensando assim as intuições sensíveis[3] de espaço

[3] Segundo a filosofia crítica de Immanuel Kant, exposta na Crítica da Razão Pura, a intuição sensível constitui a única forma de intuição possível para o sujeito cognoscente humano. Como fundamento do conhecimento empírico, ela se caracteriza como a via mediante a qual os objetos nos são dados imediatamente, na forma de conteúdos bruto da sensibilidade. Esses dados sensíveis são, por sua vez, necessariamente estruturados pelas formas puras da intuição — espaço e tempo — que funcionam como condições transcendentais a priori de toda experiência possível. Nesse sentido, a intuição sensível

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

ou de tempo e rejeitando a ideia de que conceitos matemáticos dependem dessas intuições. O segundo transformou a "evidência intuitiva" em sistemas formais, usando "símbolos sem sentido de uma linguagem de primeira ordem, segundo regras sintáticas explícitas" (Snapper, 1984, p. 93).

Por sua vez, Luitzen Brouwer, desenvolveu o Intuicionismo, apoiando-se na noção de Immanuel Kant de que "serem humanos têm uma percepção imediata do tempo" (Snapper, 1984, p. 88), assim redefiniu a intuição clássica como uma construção mental baseada na "vivência do tempo" e a torna como única fonte do conhecimento.

Em nosso entendimento, o insucesso de cada uma das correntes filosóficas da Matemática influenciou Husserl a compreender que o Logicismo seria inviável; porém, que o Formalismo e o Intuicionismo, unidos em uma estrutura intencional, poderiam oferecer uma opção de fundamentação para a Matemática, desde que a noção de intuição fosse redefinida. E assim o fez, ao fundamentar a Matemática na consciência intencional, concordando com Kant "que conhecer supõe uma capacidade a priori do espírito de encontrar coisas que se tornam para ele objetos conhecidos" (Depraz, 2008, p. 14), mas rejeitando a intuição limitada à percepção sensível, redefinindo e ampliando o conceito de intuição para incluir essências (intuição eidética) e categorias lógicas (intuição categorial).

Husserl critica a limitação kantiana da intuição ao sensível, propondo a intuição eidética como acesso direto às essências ideais. O estudioso a considera inadequada, pois capta apenas perfis do objeto e nunca a totalidade, limitação relacionada às formas *a priori* do espaço e tempo, como o próprio Kant considerava, mas também à estrutura intencional da consciência, que sempre visa o objeto como totalidade, mas só o apreende gradualmente através de sínteses contínuas (Husserl, 2006, p. 317)[4]. A variação eidética permite isolar estruturas invariantes (essências) através da imaginação livre, transcendendo exemplares empíricos.

Sobre isso, em *Ideias I*, Husserl (2006) afirma que

---

opera como condição indispensável não apenas para a recepção do material empírico, mas também para sua organização pré-conceitual, que será posteriormente elaborada pelo entendimento por meio das categorias. É importante destacar que, para Kant, as intuições sensíveis garantiam a referência imediata aos objetos e fundamentavam a síntese entre experiência e conceitos, operação essencial para a constituição do conhecimento humano (Pereira, 2010).

[4] "Esse contínuo se determina mais precisamente como um contínuo *in finito* onidirecional, que em todas as suas fases é constituído do mesmo *X* determinável e ordenado numa concatenação tal e determinado por uma composição eidética tal, que, percorrendo continuamente qualquer linha dele, o que se tem é um encadeamento coerente de aparição (que pode ser designado como uma unidade de aparição mutável), na qual um único e mesmo *X* continuamente dado se determina "mais de perto" de maneira coerente e contínua, e jamais de "outra maneira" (Husserl, 2006, p. 317).

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

> Uma coisa, por princípio, só pode ser dada "por um de seus lados", e isso não significa apenas de maneira incompleta, imperfeita, num sentido qualquer, mas significa justamente o que é prescrito pela exibição por perfil. Uma coisa é dada necessariamente em meros "*modos de aparição*", neles um *núcleo do "efetivamente exibido"* é necessariamente envolto no que se refere à apreensão por um *horizonte de "dados concomitantes"* inautênticos e por uma *indeterminidade* mais ou menos vaga (Husserl, 2006, p. 103-104).

Outra diferença radical em relação a Kant é a intuição de essência. Enquanto Kant negava a possibilidade de intuir essência, Husserl afirma explicitamente que é "a apreensão intuitiva que dá a essência e, eventualmente a dá de modo originário" (Husserl, 2006, p. 36). Para ele, as essências não são construções mentais, mas se dão na intuição, desde que se realize a variação eidética — método que permite captar a essência por meio da imaginação livre.

No §22 de *Ideias I*, o autor supracitado critica tanto Kant quanto o empirismo para a cegueira e para as essências da tradição filosófica moderna[5]. Colocando-se contrariamente a esta tradição, Husserl (2006) estabelece que o conhecimento se origina na doação originária do fenômeno.

A essência não é nem generalização indutiva nem categoria a priori, mas se mostra à consciência como correlato intencional da intuição eidética. Nesse ato, a consciência não é meramente receptiva (como na intuição sensível kantiana), mas ativamente constituinte*:* na variação eidética, ela liberta o invariante essencial do fluxo da experiência por meio de uma liberdade imaginativa que descortina o a priori concreto. Assim, a intuição de essências revela-se como evidência apodítica, não como construção subjetiva, mas como autêntico ver fenomenológico, onde o universal se dá em *carne e osso*.

Essa crítica ao paradigma moderno fundamenta o método fenomenológico: enquanto Kant precisava da dedução transcendental para justificar as categorias, Husserl as descobre na própria experiência, através da redução eidética. A variação imaginativa é a via de acesso ao próprio fenômeno em sua doação pura.

Com Ales Bello (2022), interpretamos que Husserl reconhece que o Programa de Hilbert — que opera com símbolos e regras, mas não explica como esses símbolos se vinculam à experiência intuitiva que lhes dá sentido — é insuficiente. Assim, é compreensível que a Fenomenologia tenha sido forjada como campo que se fundamenta

[5] Husserl argumenta que a recusa em reconhecer as essências como objetos legítimos de investigação é um preconceito que impede o progresso filosófico. "A cegueira à idéias é uma espécie de cegueira da alma, os preconceitos nos incapacitam a trazer ao campo judicativo aquilo que possuímos no campo intuitivo. Na verdade, todos vêem 'idéias', 'essências', e, por assim dizer, não cessam de vê-las, operam com elas em pensamento, efetuam também juízos de essência — só que do 'ponto de vista' epistemológico que adotaram eles as renegam" (Husserl, 2006, p. 66).

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

na intuição, no qual se constitui o sentido pré-predicativo que funda, em última instância, as idealizações da lógica formal e as estruturas matemáticas, explicitando sua constituição pelos atos intencionais que conferem sentido à objetividade (Husserl 2006, p. 189-193).

No que tange à Geometria, Husserl criticou a visão de Kant de espaço como forma fixa, propondo que é uma "forma categorial" que engloba múltiplas geometrias. Rejeitou igualmente a redução da Geometria a um jogo de símbolos formais, insistindo que seus conceitos derivam de experiências espaciais pré-científicas do *Lebenswelt* — a espacialidade vivida que antecede toda teorização. Asseverou que a teorização da Geometria não se reduz à sua consistência lógica, mas é garantida pela intersubjetividade da intuição eidética, que revela estruturas invariantes do espaço.

Em nosso entendimento, quanto ao Intuicionismo, Husserl reconheceu seu mérito ao destacar o papel fundante da intuição, mas criticou sua limitação ao restringir a Matemática ao finitário e ao construtivamente demonstrável. Em sua perspectiva, a *Wesensschau* supera essa restrição, pois permite acesso a objetos ideais não construtivos (conceitos geométricos puros), os quais, embora radicados na experiência, transcendem o empírico mediante a variação imaginativa.

Assim, a Geometria, enquanto ciência de idealidades, exige um método que vá além do Intuicionismo estrito, ancorando-se na descrição fenomenológica das essências espaciais. Portanto, a intuição das essências é um método privilegiado para captar o *a priori* material da Geometria, distinto tanto da abstração formalista quanto das limitações do Intuicionismo, pois assegura a passagem do mundo vivido às objetividades ideais sem perder o vínculo com a evidência originária.

A filosofia de Husserl oferece o valor cognitivo à Geometria Euclidiana, uma vez que “assegura que todos os andares superiores do edifício simbólico-formal (como a geometria analítica e a geometria diferencial) têm origem em uma intuição de essência” (Barco, 2013, p. 05).

Disso, compreendemos que a crise dos fundamentos das ciências formais, reconhecida por Husserl, na *Krisis*, pode ser resolvida pelo método de busca da origem. Em *A origem da Geometria*, de Husserl (1974), entendemos que a intuição de essência é central na proposta de fundamentar as demais geometrias na Geometria Euclidiana. Nos termos de Husserl em *Ideias I*:

> Os conceitos geométricos são “conceitos ideais”, eles exprimem algo que não se pode “ver”; sua “origem” e, com isso, também seu conteúdo é essencialmente diferente da origem e do conteúdo dos conceitos de descrição, como conceitos que exprimem imediatamente essências tiradas da simples intuição e não “ideais” (Husserl, 2006, p. 160).

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

Ainda em *Ideias I*, as verdades geométricas são idealidades objetivas cuja evidência repousa na intuição das essências e não em deduções formais. A conexão da Geometria Euclidiana, "uma ciência de 'puras idealidades'", com a experiência sensível é evidenciada pela ampla aplicação dessa ciência no "mundo da experiência sensível" (Husserl, 1970, p. 24).

No entendimento de Fontana (2007, p. 168), é a Fenomenologia Husserliana que "recupera o conceito de intuição retirando dele toda carga psicológica e mística, que devido a interpretações filosóficas e psicológicas, a tratava com ingenuidade e preconceito". Ainda conforme Fontana (2007) antes abordado na filosofia de Kant, "o conceito de intuição como conhecimento evidente e racional capaz de alcançar o plano ontológico de todo fenômeno" é assim estabelecido na filosofia fenomenológica, pois em Kant o conceito estava "preso aos objetos dados materialmente ou mesmo idealmente na mente psíquica" (p. 168). Husserl formula

> um conceito capaz de vislumbrar além da materialidade individual do objeto, e no limite, além de qualquer forma conhecida de objetividade [...] e atinge a essência mesma da objetividade, as coisas mesmas. Tal intuição das essências (*Wesensschau*) é antes a descrição das estruturas do aparecer de qualquer fenômeno (Fontana, 2007, p. 168).

Na perspectiva de Barco (2013), a filosofia Husserliana é composta por duas suposições fundamentais: uma, que a compreensão do mundo e, portanto, a constituição de todo conhecimento prático ou simbólico formal devem à experiência consciente de sua origem, e outra, que o conhecimento pode ter sua construção descrita, numa espécie de escavação arqueológica conceitual, que, quando empreendida, pode levar à origem do sentido.

Como destaca Barco (2013, p. 4), o desvelamento progressivo dos conceitos "conduzirá a uma origem definível em uma intuição nítida", sugerindo que a genealogia dos conceitos especializados remonta sempre a intuições fundantes.

Husserl (2005) destaca, nos *Prolegômenos à Lógica Pura*, no §54, que a fragilidade constitutiva do intelecto humano torna notável a própria existência de sistemas teóricos abrangentes: "Se ponderarmos o quão limitadas são as forças intelectuais do homem [...] então é de espantar que de todo existam teorias e ciências racionais abrangentes"[6] (Husserl, 2005, p. 147). Essa tensão entre finitude e aspiração à totalidade

[6] "Se ponderarmos o quão limitadas são as forças intelectuais do homem e, ainda mais, o quão restrita é a esfera dentro da qual se mantêm as complicações ainda bem compreensíveis dos conceitos abstratos, e como é cansativo já o simples compreender de maneira apropriada tais complicações; se ponderarmos, além disso, como do mesmo modo somos limitados na apreensão apropriada do sentido mesmo de conexões de

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

só se resolve mediante a técnica e o método, instrumentos que "ultrapassam a imperfeição da nossa constituição mental" (Husserl, 2005, p. 147) através de processos sígnico-simbólicos.

Aqui se revela o princípio da economia do pensamento, aquele em que, mesmo as operações realizadas de modo mecânico, preservam, em sua estrutura, uma teleologia racional que remete às evidências originárias. Como Husserl (2005, p. 147) enfatiza, "o pensamento simbólico, embora liberado da intuição imediata, mantém sua referência última à doação de sentido". Essa teleologia, nos termos do próprio Husserl (2005), concretiza-se quando procedimentos rigorosos emergem espontaneamente das bases naturais da representação, transpondo os limites da subjetividade finita mediante um método que assegura a permanência da intencionalidade fundante da razão.

Numa crítica ao naturalismo, ainda tecida junto ao §54 dos *Prolegômenos à Lógica Pura*, a economia do pensar não é um milagre[7], mas exige que se compreenda como procedimentos rigorosos emergem espontaneamente das bases naturais da representação, uma tarefa que Husserl associa à análise das circunstâncias e motivos predominantes no homem cotidiano.

Como adverte Husserl nos *Prolegômenos* (§54), tal descoberta seria impossível num formalismo reducionista que, ao converter conceitos em "peças de jogo" sígnicas, aliena a Matemática de sua teleologia racional, crítica que fundamenta sua denúncia da técnica de símbolos na *Crise das Ciências Europeias*.

Ainda no §54 dos *Prolegômenos*, dois movimentos cruciais são revelados: o primeiro diz da conversão do pensamento em substitutos sígnicos (como quando os símbolos aritméticos se tornam "peças de jogo" manipuláveis intuitivamente); e o segundo, da generalização formal (daí emerge a aritmética, elevando-se à "pura doutrina das multiplicidades"). Ele enfatiza que esse processo não é meramente instrumental, mas

proposições moderadamente complicadas; se ponderarmos, finalmente quão reduzida é *a fortiori* a esfera na qual se pode originariamente mover a pesquisa ativa, plenamente intelectiva, e que dirige o seu esforço sempre para os próprios pensamentos: então é de espantar que de todo existam teorias e ciências racionais abrangentes" (Husserl, 2005, p. 147).

[7] "Para que o surgimento natural da maquinaria da economia do pensar não permaneça como um milagre (ou o que é o mesmo: como resultado de um ato particular de criação da inteligência divina), terá de começar-se por uma análise cuidadosa das circunstâncias e motivos naturais predominantes da representação do homem quotidiano (eventualmente do homem selvagem, do animal etc.), e sobre esta base comprovar como pôde e teve de se formar 'espontaneamente', a partir de bases puramente naturais, um procedimento tão bem-sucedido" (Husserl, 2005, p. 150).

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

trata-se do mais belo e menos explorado campo para uma teoria da ciência, em que se revela a dialética entre intuição e formalização que estrutura todo conhecimento.[8]

Tomando em foco a idealidade, Soares (2008, p. 73) afirma "os objetos ideais, tal como suas relações, por sua vez, não existem no mundo espaço-temporal [...] e seu conhecimento se dá de forma a priori." Conectando-a à constituição intencional (Husserl, 2006) e articulando como a *epoché* opera nesse processo, explicitamos que essa prioridade do *a priori* exige, como Husserl demonstra na *Crise*, uma *epoché* radical: “A suspensão (*Aufhebung*) da tese do mundo natural permite ao matemático transcender o *factual* e dirigir-se à constituição intencional dos objetos ideais” (Hua VI, p. 158; §34). Essa atitude expressa um método para acessar as estruturas invariantes da consciência que fundam as verdades matemáticas (Tieszen, 2005).

Husserl (2008) decorre principalmente dos parágrafos §9 (sobre a matematização e perda do *Lebenswelt*) e §20 (sobre o formalismo vazio e a intuição como fundamento), que a Fenomenologia exige um retorno às coisas mesmas: a matematização formal, como fundamento da ciência moderna, degenera em uma técnica de símbolos, que oculta o sentido originário (Husserl, 2008, p. 52), exigindo da Fenomenologia o retorno à intuição das essências (*Wesensschau*) como fundamento último da racionalidade matemática (Husserl, 2005, p. 48).[9]

Concordando com Tieszen (2005, p. 112), “a *epoché* Husserliana na Matemática não é negação do real, mas um redirecionamento ao ato constitutivo que funda objetos ideais”. Essa abordagem resolve o paradoxo da idealidade: como o que é intemporal “pode ser apreendido por uma consciência temporal (Husserl, 2008, p. 145)"[10].

3 Sobre intuição de essência na produção do conhecimento matemático

A Fenomenologia, como método, é descrita em Soares (2008, p. 09): “A Fenomenologia surge como um rigoroso método de análise da consciência em seus movimentos intencionais e dos conceitos envolvidos na idéia do conhecimento".

Na perspectiva de Emmanuel Levinas, um estudioso da Fenomenologia

---

[8] “A partir da aritmética, que é originalmente doutrina de números e grandezas, surge, como que espontaneamente, a aritmética formal, em relação à qual os números e grandezas são tão só objetos de aplicação contingente, e não mais conceitos fundamentais” (Husserl, 2005, p. 148).

[9] Conforme Husserl (2008), todas as citações remetem à edição Husserliana (*Hua VI*), com conferência na tradução portuguesa de Ferrer (2008). Trata-se da edição das obras completas de Husserl.

[10] A epoché fenomenológica “[...] nos permite focar na constituição temporal das idealidades objetivas (como as verdades geométricas), que, embora intemporais em si mesmas, são apreendidas por uma consciência que vive no tempo” (Husserl, 2008, p. 145; *Hua VI*).

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

Husserliana, a crise dos fundamentos das ciências formais, denunciada por Husserl (2008) na obra *A crise das ciências europeias e a Fenomenologia Transcendental,* era entendida como uma crise de metodologia, que resultava em uma crise de inovação no discurso filosófico científico. Assim, o estudioso critica o naturalismo, que reduzia os fenômenos à esfera material e objetiva, negligenciando a subjetividade e a experiência consciente, e propõe como alternativa a Fenomenologia, que busca dar fundamento às ciências por meio do voltar às coisas mesmas, entendido como "voltar dos discursos e opiniões às coisas mesmas, interrogá-las na doação originária de si e pôr de lado todos os preconceitos estranhos a elas" (Husserl, 2006, p. 61). Esse movimento diz respeito ao retorno da investigação das idealidades, excluídas da esfera estritamente empírica e positiva da ciência.

Argumentando ainda sobre a importância da intuição de essências na Fenomenologia Husserliana, Grzibowski (2016) expõe que, para Levinas, a Fenomenologia é um intuicionismo, buscando com isso a compreensão sobre o quanto a intuição doadora e originária influencia a atividade de conhecer. Ele ainda explicita que, com a intuição, Husserl quer dar fundamento aos conceitos, e que a intuição será o fundamento para a Fenomenologia. A Fenomenologia, como um caminho que oferece novas possibilidades de ver o mundo, permite abertura para novidades e indica probabilidades para criação.

Podemos compreender que a Fenomenologia começa na intuição. Com a intuição, Husserl evidencia que seu intento será ir além das simples verbalizações científicas e filosóficas, porque acredita que ela dará novas possibilidades de ver o mundo, ou seja, como as coisas se dão na sua origem. "Não queremos, em absoluto, contentar-nos com 'simples palavras', ou seja, com uma compreensão verbal meramente simbólica" (Barco, 2013, p. 5). O intuito Husserliano é, no entanto, ultrapassar a esfera do mundo natural e, assim, indicar probabilidade de criação e abrir-se a novidades.

As intuições são tanto sensoriais quanto essenciais e manifestam-se para nós como fonte de onde todo conhecimento provém. Husserl (2006) afirma que a constituição do conhecimento sempre é para um sujeito e tem início na experiência desse sujeito com algo; ou seja, é sempre o conhecimento de algo por alguém. Os atos de consciência do sujeito são os mediadores dessa constituição e, por serem do sujeito ocorrem na subjetividade. Importa destacar que esses atos passam à intersubjetividade e se mantém na objetividade.

Em *Ideias I*, no parágrafo primeiro, Husserl (2006) se expressa sobre as intuições

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

sensíveis. O exposto abaixo visa esclarecer:

> A toda ciência corresponde um domínio de objetos como domínio de suas investigações, e a todos os seus conhecimentos, isto é, aqui a todos os seus enunciados corretos correspondem, como fontes originárias da fundação que atesta a legitimidade deles, certas intuições nas quais há doação dos próprios objetos desse domínio ou, ao menos parcialmente, doação originária deles. A intuição doadora na primeira esfera "natural" de conhecimento e de todas as suas ciências é a experiência natural, e a experiência originariamente doadora é a percepção, a palavra entendida em seu sentido habitual. Ter um real originariamente dado, "adverti-lo" ou "percebê-lo" em intuição pura e simples é a mesma coisa. Temos experiência originária das coisas físicas na "percepção externa", não mais, porém, na recordação ou na expectativa antecipatória; temos experiência originária de nós mesmos e de nossos estados de consciência na chamada percepção interna ou de si, mas não dos outros e de seus vividos na "empatia". "Observamos o que é vivido pelos outros" fundados na percepção de suas exteriorizações corporais. Essa observação por empatia é, por certo, um ato intuinte, doador, porém não mais originariamente doador. O outro e Sua vida anímica são trazidos à consciência como estando "eles mesmos ali", e junto com o corpo, mas, diferentemente deste, não como originariamente dados (Husserl, 2006, p. 2).

Bicudo (2010) busca esclarecer que a fonte da objetividade está situada nos atos da consciência, "naqueles da 'intuição sensorial' dada na experiência vivida diretamente com as ocorrências individuais e, também, na 'intuição de essência' sendo esta entendida como o ver claro, ou a evidência permitida pela abstração intencional" (Bicudo, 2010, p. 37).

Nos termos de Ales Bello (2022), a característica principal da ciência, qualquer que seja ela, é "uma unidade arquitetônica formada por um elo sistemático entre proposições (*Sätze*) e justificações (*Begründungen*), segundo a ordem natural das coisas e justificativas, segundo a estrutura cognitiva do campo de investigação" (Ales Bello, 2022, p. 122).

Tratando de apresentar agora sobre as intuições de essência, "aquela que faz ver a verdade última dos fenômenos" (Fontana, 2007, p. 170), destacamos que "elas são tratadas de um modo intuitivo e de forma alguma isso contradiz o caráter científico da Fenomenologia transcendental, ao contrário, ela é a visão intelectual (*Einsicht*) perfeitamente clara das estruturas possibilitadoras de mundo", como nos esclarece Fontana (2007, p. 170). O resgate do conceito de intuição pela Fenomenologia Husserliana é possível pelo método descritivo da Fenomenologia, que coloca a intuição como fundamento da evidência originária.

Um exemplo da intuição da essência como fundamento último do conhecimento matemático é a transição da geometria euclidiana para a geometria hiperbólica. A primeira emerge da intuição do espaço como plano e homogêneo, uma evidência originária ligada ao *Lebenswelt*; a segunda, modifica essencialmente essa intuição,

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

revelando que o espaço pode ter curvatura. Husserl assim se refere a isso "a geometria euclidiana tem sua fonte de sentido na evidência do mundo da vida (*Lebenswelt*) como forma de espacialidade *plana*" (Husserl, 1974, p. 173) constituindo-se como "objetividade ideal através de sínteses de identificação na corrente temporal da consciência" (Husserl, 2006, p. 328). Nos termos de Barco (2013),

> Se a intencionalidade estiver direcionada para a espacialidade do objeto, então a variação eidética pode separar o essencial do não essencial, resultando em uma forma ideal, como uma constante que se mantém invariante após a abstração de todos seus predicados possíveis (Husserl, 2006, p. 35 *apud* Barco, 2013, p. 5).

Para Husserl (2006, p. 33-34), "o mundo é o conjunto completo dos objetos da experiência possível e do conhecimento possível da experiência, dos objetos passíveis de serem conhecidos com base em experiências atuais do pensamento teórico correto". A Matemática é, para ele, uma ciência que constrói seus objetos, ou seja, os conceitos e estruturas baseando-se na intuição e por meio de um processo de apreensão intuitivas das essências. Os objetos matemáticos possuem a propriedade de serem potencialmente intuíveis por uma subjetividade.

Os matemáticos, por meio de uma atenção reflexiva, podem acessar as essências dos objetos. Isso não por meio de operações com símbolos. Dessa forma, Husserl entende que a Matemática é construída por um processo que envolve a intuição e a formalização. A formalização é compreendida como um procedimento metodológico essencial para alcançar clareza e rigor na análise fenomenológica e na lógica e segue procedimentos matemático-formais. Husserl se recusa a considerar a Matemática formal como um jogo de símbolos, "assim, embora o matemático possa não estar interessado na questão da verdade possível para as formas da teoria e na questão da verdade possível para a 'multiplicidade', o lógico deve necessariamente se referir a um domínio de objetos e possíveis teorias." (Ales Bello, 2022, p. 78).

Tratando-se de um matemático em atividade, Husserl concebe que os objetos matemáticos se enraízam na experiência humana e que não podem ser "encontrados" senão por meio da intuição de essência. Dessa forma, opõe-se ao platonismo, que entende que os objetos existem no mundo independentemente de uma consciência, e aproxima-se, em certa medida, do empirismo, que entende que esses objetos se encontram ao acesso da percepção sensorial. A intuição de essência é uma percepção análoga à percepção sensorial. A percepção sensorial apreende objetos transcendentais (físicos, materiais), enquanto a intuição de essência apreende estruturas ideais e invariantes.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

No que diz respeito à ciência Matemática, Barco (2013) explicita que o próprio Husserl afirma

> Só podemos evitar que a matemática se perca "em um simbolismo excessivo" se "a ideia desta matemática for construída [...] de dentro do complexo total da ideia de lógica" (HUSSERL, 1969, p. 86). Só assim podemos construir uma "matemática formal que não flutua no ar, mas que se ergue de suas fundações e é inseparável delas" (Husserl, 1969, p. 87 *apud* Barco, 2013, p. 6).

A intuição ocorre numa visão clara e imediata, quando algo se ilumina e se vê com clareza como é essa conexão; dá se uma compreensão mais profunda das estruturas subjacentes que dão significado à experiência (Bicudo, 2010). Em Husserl (1980, p. 106), podemos entender que a intuição de essência é ela mesma "visão evidente" *a priori*. Importante sublinhar que, para ser concretizada, ela pode passar por processos cognitivos anteriores. O ponto crucial é compreender que a intuição em si não deve ser confundida com as etapas prévias necessárias para seu reconhecimento.

A intuição é subjetiva e origina nas vivências conscientes de cada indivíduo, porém as experiências intuitivas podem ser compartilhadas e, assim, passam a fazer parte da intersubjetividade. Este tempo vivido e dedicado a resolver o problema envolve a intuição e se move em direção à formalização. O indivíduo envolvido na atividade busca a tradução do que foi visto de modo claro e imediato, em termos matemáticos, e dedica-se à verificação rigorosa dessa formulação por meio de argumentação lógica e demonstração matemática. Essa dedicação se dá na historicidade, na comunidade matemática em que a intersubjetivação, a comunicação e o apuramento da linguagem estão em jogo e podem ter durações de tempo diferentes.

Em nosso entendimento, Husserl, ao fundamentar a sua ciência na intuição de essência, antecipa, de certo modo, o resultado do teorema da incompletude de Gödel, na medida em que a incompletude exige um recurso à intuição. A Fenomenologia propunha a intuição para preencher o que a Lógica formal não podia capturar, por um lado. Por outro, Gödel via na redução fenomenológica de Husserl um caminho para entender a intuição matemática que seu teorema da incompletude indiretamente revelara.

Na sequência, explicitamos as evidências claras que detectamos na bibliografia acessada e que influenciaram Gödel na escolha das ferramentas e na perspectiva da demonstração.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

4 Ideias intuitivas que detectamos na abordagem adotada por Gödel na demonstração do teorema da incompletude

Neste tópico, apresentamos aspectos da visão filosófica de Gödel que influenciaram sua abordagem do problema de demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética. Exploramos seu objetivo e sua estratégia na prova da incompletude, especialmente a decisão de expressar a metamatemática na aritmética e a construção de proposições autorreferentes. Para isso, trazemos passagens de suas cartas e manuscritos que revelam intuições ausentes em seus pares, como a defesa de métodos transfinitos e a crença em verdades matemáticas além da demonstrabilidade formal.

A demonstração do teorema da incompletude de Gödel foi inusitada tanto pela forma como foi realizada quanto pela mensagem que transmitiu, provocando um revés na comunidade de matemáticos. Colocam-se, então, questões como: Quais motivações filosóficas impulsionaram Gödel? Que concepções singulares orientaram sua abordagem? Que ferramentas teórico-metodológicas foram mobilizadas na demonstração? O que se segue apresenta evidências claras que influenciaram a forma de enfrentamento teórico do problema por Gödel.

No ano de 1929, Gödel defendeu o doutorado demonstrando o teorema da completude da lógica de predicados, um problema aberto da Matemática que vinha sendo trabalhado por Skolem e que havia sido apresentado no livro *Grundzüge der theoretischen Logik* (Princípios de Lógica Matemática) (Hilbert e Ackermann, 1928).

Podemos entender que as concepções elaboradas em seu doutorado, a prova do teorema da completude da Lógica de predicados, defendido dois anos antes do teorema da incompletude da aritmética de Peano, estavam presentes para Gödel e não estavam claras aos demais matemáticos da época. Em carta a Hao Wang, datada de 7 de dezembro de 1967, Gödel explica por que Thoralf Albert Skolem (1887-1963) não havia construído a prova da completude do cálculo de predicados da Lógica. Ele expõe que os lógicos da época partilhavam de um preconceito que produzia uma falta de atitude epistemológica em relação à metamatemática e ao raciocínio não finitário, enquanto Gödel sustentava uma concepção objetivista da Matemática, da metamatemática e do raciocínio transfinito, posição que se revelaria fundamental para sua demonstração do teorema da incompletude. Para Feferman *et al.* (1995), Gödel refletiria posteriormente sobre a engenhosidade de seus resultados ao articular os sistemas matemáticos às expressões da matematemática:

> Como, de facto, alguém poderia pensar em expressar a metamatemática nos próprios sistemas matemáticos, se estes últimos são considerados como

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

> consistindo em símbolos sem sentido que adquirem algum substituto de significado apenas através da metamatemática? Ou como poderíamos fornecer uma prova de consistência para a hipótese do contínuo por meio do meu modelo transfinito Δ se as provas de consistência têm que ser finitárias?[11] (Feferman *et al*., 1995, p. 397-398).

Gödel afirmou que seu realismo acerca dos conjuntos e do transfinito integrava seu sistema filosófico desde 1925. Enquanto a maioria dos lógicos contemporâneos via os sistemas matemáticos como meros símbolos desprovidos de significado intrínseco — visão que, segundo Gödel, os impediu de conceber a metamatemática dentro dos próprios sistemas matemáticos —, ele logrou concretizar essa possibilidade ao estabelecer uma correspondência precisa entre metamatemática e aritmética. A solicitação de que as provas deveriam ser finitárias teria desviado a atenção de que estas provas poderiam ser realizadas por meio do modelo transfinito, que ele propôs.

Sobre a posição realista de Gödel — ou, mais precisamente, o realismo conceitual ─ é de amplo conhecimento o entendimento de Gödel de que a existência de sentenças indemonstráveis na Matemática, uma vez que esta é uma construção, revela a existência de um construtor que conhece todas as propriedades e o comportamento do que foi construído por ele. Davis (2005) explicita que a visão filosófica de Gödel sobre o Programa de Hilbert e a sua atitude em relação a uma postura realista em relação aos conjuntos foram determinantes na abordagem do problema que culminou no teorema da incompletude. É importante ter em conta que as ideias e crenças de Gödel eram complexas e foram evidenciadas na abordagem matizada que ele teve na prova da incompletude. Elas não causavam estranheza, pois a prova da incompletude e os estudos da hipótese do contínuo (Todo conjunto infinito ou números são contáveis ou têm a cardinalidade do *continuum*) eram terrenos não pavimentados, de modo que ele desenvolvia as ferramentas técnicas para sustentar o que precisava.

Este fato sugere que Gödel, assim se colocando para resolver tal problema, se propõe a contribuir com o Programa de Hilbert, o qual considerava razoável provar a consistência das formalizações da matemática clássica por meios finitários. Sua demonstração mostrou que, no cálculo de predicados, dadas duas sentenças A e ~A, apenas uma delas poderia ser derivada das regras, desde que os axiomas e as regras de inferência fossem definidos com precisão.

---

[11] How indeed could one think of expressing metamathematics in the mathematical systems themselves, if the latter are considered to consist of meaningless symbols which acquire some substitute of meaning only through metamathematics? Or how could one give a consistency proof for the continuum hypothesis by means of my transfinite model Δ if consistency proofs have to be finitary? (Feferman et al., 1995, p. 397-398).

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

A respeito da mudança que ocorre com a posição de Gödel em relação ao Programa de Hilbert, Davis (2005) afirma

> Assim, ao longo dos anos Gödel passou de uma posição inicial de aliar-se com o programa de Hilbert, a manter a esperança de que seu próprio trabalho não tivesse destruído, para perceber com algum pesar que a esperança se foi, para finalmente falar do projeto com algo parecido com desdém (Davis, 2005, p. 233).

Dois anos depois da prova da completude do cálculo de predicados, Gödel demonstrou o teorema da incompletude da aritmética de Peano. No verão de 1930 ele teria começado a estudar o problema da consistência da análise clássica. Ele, num rascunho de uma carta não enviada, que seria uma resposta a Yossef Balas de uma carta datada de 27 de maio de 1970, em Feferman *et al*. (1995), explicitou que foi levado ao teorema da incompletude quando estava buscando uma prova de consistência relativa da aritmética de segunda ordem (que ele chamou de "análise") na aritmética de primeira ordem. Para ele, um modelo aritmético de análise é uma relação aritmética de pertinência que satisfaz o axioma da compreensão, que é: $(\exists n)\ (x)\ x \in n \equiv \varphi\ (x)$. Assim:

> Se o último "φ (x)" é substituído por "φ (x) é demonstrável", a relação de pertinência pode ser facilmente definida. No entanto (e este é o ponto decisivo) decorre da solução correta dos paradoxos da semântica de que a "verdade" das proposições de uma linguagem não pode ser expressa na mesma linguagem, enquanto a demonstrabilidade (sendo uma relação aritmética) pode. Portanto, verdadeiro não é logicamente equivalente a provável (Davis, 2005, p. 231, tradução nossa).[12]

O próprio Gödel relata que, ao aprofundar-se no problema, questionou-se sobre as razões que levavam David Hilbert (1862-1943) a buscar uma demonstração direta da consistência por métodos finitários. Ele anteviu dois desafios distintos: provar a consistência da teoria dos números usando apenas a teoria finitária dos números e, paralelamente, demonstrar a consistência da análise por meio da teoria dos números.

Coloca-se a questão sobre o que teria orientado Gödel a não insistir em seguir os passos de Hilbert. Ao invés de uma prova direta por métodos finitários, Gödel adotou uma estratégia de, por meio dos números de Gödel e do teorema fundamental da Aritmética, codificar símbolos, fórmulas, e sequências de fórmulas, mapear a metamatemática na aritmética e transformar afirmações sobre o sistema formal em

[12] "For an arithmetic model of analysis is nothing else but an arithmetical ∈-relation satisfying the comprehension axiom: $(\exists n)\ (x)\ x \in n \equiv \varphi(x)$. Now if in the latter "φ(x)" is replaced by "φ(x) is provable", such an ∈-relation can easily be defined. However (and this is the decisive point) it follows from the correct solution of the semantic paradoxes that the "truth" of the propositions of a language cannot be expressed in the same language, while provability (being an arithmetical relation) can. Hence true $\not\models$ provable" (Davis, 2005, p. 231).

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

proposições autorreferentes dentro da própria aritmética. Com isso, ele criou uma maneira de o sistema da metamatemática "falar por si mesmo" por meio de números. A fórmula G que Gödel construiu, quando interpretada metamatematicamente, expressa sua própria indemonstrabilidade. Em nossa interpretação, Gödel teve o *insight* de que a consistência enquanto conceito metamatemático não era uma noção sintática, como Hilbert acreditava. Desse modo, já estava implicitamente encapsulada na estrutura dos sistemas formais aritméticos, por isso a articulação lógica da aritmetização da sintaxe permitiria que a própria condição se expressasse, em outras palavras, deixou o sistema mostrar sua própria limitação, assim como a Fenomenologia deixa os fenômenos mostrarem seus próprios horizontes de sentido. Essa intuição levou Gödel a desenvolver seu método revolucionário: fazer com que o sistema aritmético articulasse sua própria condição lógica através da aritmetização da sintaxe.

A sua demonstração indireta, por *reductio ad absurdum*, tinha por hipótese que o sistema era ω-consistente e completável. Ao estabelecer uma bijeção efetiva entre as fórmulas da metamatemática e os números da aritmética, ele derivou uma contradição autorreferencial: a fórmula G "afirma" sua própria indemonstrabilidade. Essa contradição obriga, por decisão lógica, à negação da completude e à preservação da ω-consistência. Assim, revela-se que sistemas formais podem conter proposições verdadeiras que não podem ser demonstradas dentro deles, um limite intrínseco à formalização. Assim, revela-se que sistemas formais podem conter proposições verdadeiras que não podem ser demonstradas dentro deles, um limite intrínseco à formalização e ao Programa de Hilbert. Essa contradição não foi um acaso, mas a formalização de sua intuição: que a consistência, era irredutível ao formalismo, porém estava estruturalmente inscrita dos sistemas aritméticos, não como teorema demonstrável, mas como pressuposto constitutivo.

Ainda sobre aspectos que constituem as intuições que direcionaram Gödel em suas decisões, a demonstração da completude da lógica de predicados estabeleceu que os axiomas e regras de inferência desse sistema eram suficientes para decidir todas as questões formalmente expressas neste sistema. A demonstração do teorema da incompletude estabelece que os axiomas e regras de inferência do sistema formal da aritmética não eram suficientes para decidir todas as questões formalmente expressas neste sistema. Na apresentação do resultado da incompletude Gödel expõe:

> É razoável por isso supor que estes axiomas e regras de inferência sejam também suficientes para decidir todas as questões em matemática que podem ser formalmente expressas nesses sistemas. No que se vai seguir mostrar-se-á

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

> que não é assim, mas antes que, em ambos os sistemas citados, existem problemas relativamente simples dos números inteiros que não podem ser decididos com base nos axiomas. Esta situação não depende da natureza especial dos sistemas construídos, mas aplica-se a uma vasta classe de sistemas formais (Gödel, 1977, p. 245).

É fundamental analisar como Gödel concebeu a demonstração da incompletude, especialmente porque ele já havia provado a completude da lógica de primeira ordem. Assim como seus contemporâneos, poderia ter assumido que era apenas questão de tempo até que toda proposição bem formulada se tornasse demonstrável. Mas o que ele percebeu que o levou a concluir justamente o oposto: que uma prova completa de consistência seria impossível?

Gödel compreendia que uma prova de consistência dos axiomas exigiria estabelecê-la exclusivamente através da análise de combinações finitas de símbolos, abstendo-se de quaisquer noções abstratas. Essa limitação metodológica o levou a contornar a abordagem convencional, optando por estruturar sua demonstração sob a hipótese prévia da consistência da aritmética. O cerne dessa estratégia materializa-se na construção de uma sentença indecidível: uma proposição que, sob a suposição de consistência do sistema, não pode ser nem demonstrada como verdadeira nem refutada.

Com base no exposto, entendemos que a visão de Gödel sobre como expressar a metamatemática foi fundamental na articulação que ele efetuou utilizando a numeração para mapear a metamatemática na aritmética e vice-versa. A vivência com a realização da prova da completude da lógica de predicados permitiu o entendimento de que provas finitárias poderiam ser realizadas por meio do modelo transfinito e que a prova da consistência dos axiomas de Peano solicitava que fosse demonstrado, apenas pela reflexão sobre combinações concretas finitas de símbolos, sem introduzir elementos mais abstratos. Por sua vez, essa compreensão da dificuldade da demonstração da consistência, por esses meios, o fez supor que a aritmética seria consistente e construir uma sentença indecidível. Conforme afirma no início de sua demonstração, ele antecipara a existência de tal sentença — algo que nenhum de seus contemporâneos havia previsto —, sustentando que seria extremamente difícil provar todas as questões formalmente expressas nos sistemas apenas por meio de axiomas e regras de inferência.

A análise precedente revela como a concepção gödeliana de como expressar a metamatemática foi determinante para sua estratégia de mapeamento bidirecional entre metamatemática e aritmética mediante a numeração. Sua experiência prévia com a demonstração da completude da lógica de predicados possibilitou compreender que: (i)

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

procedimentos finitários poderiam ser estendidos através de modelos transfinitos e (ii) que a prova de consistência dos axiomas de Peano exigiria operar estritamente com combinações finitas de símbolos, sem recorrer a constructos abstratos.

Essa percepção das limitações inerentes ao enfoque finitista levou Gödel a adotar uma abordagem radical: assumir a consistência da aritmética como postulado e, a partir dessa premissa, construir explicitamente uma sentença indecidível. Como ele mesmo destacou na exposição inicial de sua prova, em contraste marcante com a expectativa predominante entre seus contemporâneos, tal construção demonstrava a impossibilidade fundamental de decidir todas as proposições formalmente expressáveis unicamente mediante axiomas e regras de inferência.

Essas concepções inspiraram Gödel tanto na perspectiva de enfrentamento quanto na estratégia adotada. Conforme anunciado no início desta seção, ampliaremos agora a análise trazendo as intuições evidenciadas na demonstração: a intuição da numeração, a formulação dos números de Gödel, o uso dos números primos, o mapeamento das fórmulas e a concepção das fórmulas como números, entre outras. Entendemos que esses elementos revelam como os raciocínios lógico e matemático se encontram manifestos na demonstração do teorema da incompletude.

Além disso, essas concepções fundamentais orientaram a perspectiva adotada por Gödel e sua estratégia demonstrativa, conforme antecipado na introdução desta seção. Elas se materializam em intuições percebidas na demonstração, na seção seguinte. Nesse constructo demonstrativo, percebe-se como os modos de raciocínio lógico e matemático se articulam de maneira essencial: a lógica formal provê a estrutura dedutiva, enquanto a aritmética oferece o substrato para a autorreferência, dualidade que constitui o cerne da prova de incompletude.

Este trabalho não se dedicou a uma comparação sistemática entre Husserl e os limites da lógica formal. Porém, consideramos relevante observar que Gödel reconhecia que “a intuição matemática não pode ser substituída por convenções formais ou sistemas axiomáticos, pois ela é a fonte última da verdade matemática”[13] (Feferman *et al.*, 1995, p. 230).

[13] A concepção gödeliana da intuição matemática, embora superficialmente próxima à noção Husserliana de *Wesensschau*, difere radicalmente em seus fundamentos: para Gödel, trata-se de um acesso a verdades objetivas (platonismo); já para Husserl, é um processo constitutivo de sentido na consciência intencional (Feferman *et al*., 1995, p. 230).

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

5 Ideias intuitivas detectadas na estratégia mobilizada por Gödel na demonstração do teorema da incompletude

Nesta seção, apresentamos as ideias fundantes detectadas na demonstração do teorema da incompletude de Gödel, articulando-as com a intuição de essência (*Wesensschau*) Husserliana. Compreendemos que Gödel parte de intuições platônicas sobre verdades matemáticas irredutíveis, enquanto Husserl oferece o marco para analisar seu estatuto constitutivo. A seguir, apresentamos elementos-chave detectados na estratégia gödeliana: a bijeção metamatemática-aritmética, a numeração de Gödel, a codificação simbólica unívoca e a autorreferência no indecidível.

5.1 Bijeção metamatemática-aritmética

Gödel criou uma bijeção entre proposições metamatemáticas e números naturais, inspirando-se no Paradoxo de Richard – que usava enumeração ordinal (por posição na lista de definições) e gerava antinomias autorreferenciais. Gödel adotou uma codificação cardinal baseada em primos: cada símbolo recebe um código único; fórmulas são mapeadas a produtos de primos elevados a esses códigos.

Essa numeração preserva relações lógicas: afirmações como “a fórmula X é demonstrável” tornam-se operações aritméticas (Batistela, 2017, p. 40), sem paradoxos, graças à unicidade da fatoração garantida pelo teorema fundamental da aritmética (TFA)[14]. A propriedade da unicidade da fatoração é essencial para: (i) garantir que cada fórmula tenha um único código, mesmo que difiram em apenas um símbolo, seus números de Gödel serão diferentes, pois a fatoração em primos muda. Exemplo: A fórmula "0 = 0" e "¬(0 = 0)" terão números de Gödel completamente distintos, mesmo compartilhando parte da estrutura, a primeira tem número de Gödel $2^6.3^5.5^6$ e a segunda $2^1.3^8.5^6.7^5.11^6.13^9$; (ii) assegurar que não haja ambiguidade na decodificação, pois só existe uma única fórmula correspondente reconstruída a partir dos expoentes. Isso evita o problema apontado pelo paradoxo de Richard, em que uma mesma expressão poderia ter mais que um significado; e (iii) preservar a estrutura hierárquica da numeração das sequências de fórmula (demonstrações), as quais são codificadas como produtos de

[14] "Dado qualquer número natural n > 1, há apenas um conjunto de primos cujo produto é n” (Fonseca, 2011, p. 69). O Teorema Fundamental da Aritmética garante a fatoração única de um número natural em potências de primos. Essa propriedade é fundamental para a numeração de Gödel, assegurando que cada fórmula ou sequência de fórmulas tenha um código único e seja perfeitamente recuperável a partir dele.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

primos elevados aos números de Gödel das fórmulas individuais, e possibilitar que a sequência original seja recuperada a partir do número.

Enquanto a numeração ordinal de Richard permitia que uma mesma expressão tivesse múltiplos significados (gerando paradoxos), a abordagem cardinal de Gödel, ancorada no TFA, assegura que cada número de Gödel corresponda a uma única fórmula, isso foi um avanço decisivo para a criação da autorreferência consistente, como veremos na numeração de Gödel. O paradoxo de Richard pode ser entendido como o pano de fundo do *insight* de Gödel na elaboração da bijeção e a numeração como a ferramenta.

5.2 A numeração de Gödel

Como visto na seção 5.1, essa codificação evita paradoxos *à la Richard* porque cada fórmula tem um número único. O mecanismo formal empregado por Gödel na numeração consistiu em associar a cada símbolo um número específico: às variáveis independentes foram atribuídos números primos a partir de 11; às fórmulas, os quadrados desses primos; e, às propriedades dos números, os respectivos cubos.

símbolo	~ (não)	V (ou)	→ (se... então)	∃ (existe)	= (igual)	0 (zero)	S (sucessor)	((pontuação)	) (pontuação)	, (pontuação)
número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Variáveis numéricas

símbolo	x	y	z	...
número	11	13	17	

Fórmulas

símbolo	p	q	r	...
número	11^2	13^2	17^2	

Propriedades dos números

símbolo	P	Q	R	...
número	11^3	13^3	17^3	

Com essa numeração e símbolos procede-se a codificação das fórmulas e das sequências de fórmulas. Cada fórmula é mapeada para um único número natural através da listagem de símbolos: na ordem exata em que aparecem e do produto de primos, sendo que o primeiro primo (2) é elevado ao código do primeiro símbolo, o segundo primo (3) elevado ao código do segundo símbolo etc. Um exemplo concreto ajuda a ilustrar o processo. Vamos codificar a fórmula "(∃x)(x=0)".

Primeiro, substituímos cada símbolo pelo seu código numérico de Gödel (conforme a tabela anterior): (→ 8; ∃ → 4; x → 11;) → 9; (→ 8; x → 11; = → 5; 0 → 7; e) → 9. Agora, usamos a sequência desses códigos como expoentes dos números primos em ordem crescente. O número de Gödel da fórmula será a sequência multiplicativa de primos, cada um elevado aos códigos na ordem: $2^8.3^4.5^{11}.7^9.11^8.13^{11}.17^5.19^7.23^9$

Pesquisa ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

Este número colossal é a representação numérica única da fórmula “(∃x)(x=0)”. A propriedade fundamental desse método reside no Teorema Fundamental da Aritmética, que garante que qualquer número natural se decompõe de forma única em fatores primos. Consequentemente, se partirmos desse número de Gödel, podemos decompô-lo em seus fatores primos, recuperar a sequência de expoentes (8, 4, 11, 9, 8, 11, 5, 7, 9) e, ao consultar a tabela de códigos, reconstituir de maneira unívoca a fórmula original. Qualquer alteração mínima na fórmula, como substituir um x por um y, modificaria um dos códigos e, portanto, geraria um número de Gödel completamente distinto, graças à propriedade da fatoração única.

Uma sequência de fórmulas, que corresponde a demonstrações no sistema formal, a codificação procede como acima para as fórmulas individuais, digamos as linhas da demonstração, e o número de Gödel da sequência é o produto de primos elevados aos números de Gödel das fórmulas individuais. Por exemplo, se uma prova tem 3 linhas com números de Gödel 20, 36 e 42*,* o número da sequência *é* $2^{20}\times3^{36}\times5^{42}$.

A codificação de sequências de fórmulas como produtos de primos elevados aos números de Gödel de suas linhas permite expressar afirmações metamatemáticas — como "a sequência X é uma prova válida da fórmula Z" — como relações aritméticas entre números. Isso ocorre porque: (i) a fatoração única do número de Gödel de X revela a estrutura da demonstração; (ii) cada passo da prova corresponde a uma relação matemática verificável entre os expoentes (por exemplo: se uma fórmula deriva de outras por *modus ponens*[15], seus códigos satisfazem uma equação específica); e (iii) o número de Gödel de Z deve ser o código da última fórmula na sequência decodificada. Assim, Gödel converte afirmações metamatemáticas sobre demonstrações em relações aritméticas entre números, aproveitando a fatoração única dos primos. Essa aritmetização permite expressar predicados metamatemáticos como “X é uma prova de Z” em termos

---

15 Nagel e Newman (1973, p. 84) chamam de Regra de Separação (equivalente ao Modus Ponens). Na aritmetização de Gödel, é traduzida como uma operação sobre os números de Gödel das fórmulas. Como explicam estes autores, essa regra permite derivar G a partir de A e A→G: se A (a fórmula que expressa a consistência da aritmética) fosse demonstrável, então G (a fórmula indecidível) também o seria - o que contradiz sua construção. Formalmente:
A (Consistência)
A→G (Teorema de Gödel)
G (por Regra de Separação)
Como G foi construída para ser indecidível (verdadeira, mas não demonstrável no sistema), segue-se que A não pode ser demonstrável sem contradição. Nos termos de Nagel e Newman (1973) “A não é demonstrável a menos que o sistema seja inconsistente” (p. 84). Assim, a Regra de Separação, aritmetizada, revela o cerne da prova: a impossibilidade de demonstrar a consistência do sistema dentro do próprio sistema.

 ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

puramente numéricos, ou seja, traduzir noções metamatemáticas como a demonstrabilidade em relações aritméticas, como detalhado em Nagel e Newman (1973).

Vejamos este exemplo, a codificação de uma sequência de sequências de fórmulas como produtos de primos: uma demonstração com três fórmulas codificadas

$$2^{ng(\phi 1)} \,.\, 3^{ng(\phi 2)} \,.\, 5^{ng(\phi 3)}$$

Isso permite expressar afirmações metamatemáticas como relações aritméticas. Por exemplo, a afirmação "a sequência X prova a fórmula Z" transforma-se em: i) verificar se o expoente de 2 na fatoração de X corresponde ao número de Gödel de um axioma; ii) checar se o expoente de 5 (ng(ϕ3)) deriva dos expoentes de 2 e 3 (para ng(ϕ1) e ng(ϕ2)) via regras aritméticas que espelham *modus ponens*; confirmar que o último primo na fatoração de X tem expoente igual a ng(Z). Assim, a sentença "X é prova de Z" reduz-se a operações sobre expoentes de primos (Nagel e Newman, 1973, p. 71). Gödel neste passo formal da demonstração criou uma função denominada Dem(X, Z) que é uma relação recursiva primitiva (ou computável) que verifica se X é uma prova válida de Z.

Neste exemplo abaixo segue uma ilustração da situação. Se uma demonstração *X* tem número de Gödel $2^{10}\times 3^{12}\times 5^{15}$, afirmar que "*X* prova *Z*" equivale a verificar: (i) Se 10, 12 e 15 são números de Gödel de axiomas ou fórmulas válidas; (ii) Se 15 deriva de 10 e 12 por operações aritméticas que espelham regras lógicas; e (iii) Se $15=ng(Z)$.

A artimetização, captura a noção metamatemática de demonstrabilidade em termos puramente aritméticos, permite a Gödel aplicar o Lema da Diagonalização[16]. Este método, como explicam Nagel e Newman (1973) consiste em construir uma fórmula G que, interpretada metamatematicamente, não pode ser demonstrada no sistema aritmético. A técnica equivale a substituir a variável de uma fórmula autorreferencial pelo próprio número de Gödel dessa fórmula — um análogo autorreferencial ao paradoxo do mentiroso, porém formalmente legítimo dentro do sistema. Assim, a sentença G é demonstrável se e somente se não for demonstrável, revelando uma limitação intrínseca dos sistemas formais axiomáticos. Um exemplo simples da diagonalização: seja F(x) a fórmula "x não é o número de Gödel de uma fórmula demonstrável". A diagonalização

[16] Trata-se de um conceito da Lógica Matemática que permite estabelecer a existência de sentenças autorreferentes. Esse lema, explora as limitações dos sistemas formais e contribui para a construção da fórmula *G*. Assim, podemos dizer que, pautado no Lema da Diagonalização, o teorema diz sobre si mesmo e sobre o sistema em que habita.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

consiste em encontrar o número de Gödel da própria F(F), criando assim uma autorreferência.

Enquanto o paradoxo de Richard surgia da autorreferência direta em linguagem natural — onde uma mesma expressão podia ambiguamente referir-se a si mesma e a seu significado —, Gödel evitou a antinomia ao ancorar a autorreferência na estrutura aritmética. Ao codificar a afirmação metamatemática "a fórmula com número de Gödel sub(n,13,n) não é demonstrável" como uma fórmula aritmética legítima G, ele não apenas replicou o mecanismo do paradoxo, mas o disciplinou pela bijeção entre sintaxe e números. Assim, a autorreferência deixou de ser um problema para tornar-se a alavanca que expõe a incompletude: G é verdadeira precisamente porque o sistema não pode demonstrá-la sem contradição.

Assim, a numeração de Gödel não apenas supera as limitações do paradoxo de Richard, mas viabiliza a construção de uma proposição G que, ao afirmar sua própria indemonstrabilidade, encapsula a essência da incompletude: uma verdade aritmética que o sistema não pode capturar sem cair em contradição. Esse será o ponto de partida para a codificação simbólica da autorreferência, que exploraremos a seguir.

5.3 Codificação simbólica unívoca

A estratégia da codificação unívoca elaborada por Gödel fundamenta-se na transformação de enunciados metamatemáticos em números, assegurando uma correspondência biunívoca entre símbolos e fórmulas metamatemáticas em números aritméticos. Como destacado por Batistela (2017), a codificação evita ambiguidades ao associar cada símbolo elementar pertencente ao vocabulário fundamental do sistema delineado por Gödel a um número distinto. Assim: símbolos de constantes lógicas associadas com códigos de 1 a 10; variáveis numéricas, sentenciais e de predicados associadas a primos a partir de 11, seus quadrados e cubos, respectivamente. Essa codificação garante que cada símbolo e cada fórmula construída a partir deles receba um número de Gödel único via fatoração em primos (TFA), permitindo que enunciados metamatemáticos sejam expressos como relações aritméticas.

A fórmula "(∃x)(x=0)", cuja codificação é $2^8.3^4.5^{11}.7^9.11^8.13^{11}.17^5.19^7.23^9$, permite ilustrar porque o método de Gödel da numeração cardinal se desvia das antinomias ordinais do Paradoxo de Richard que gerava ambiguidades (Nagel e Newman, 1973, p. 59). Como cada símbolo é associado a um número e a ordem dos símbolos na

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

fórmula determina os expoentes na fatoração, se mudarmos um único símbolo, o número de Gödel obtido é diferente, garantindo a unicidade da representação.

Quanto à finalidade da codificação unívoca, ela permitiu converter afirmações metamatemáticas em relações aritméticas, possibilitando que o próprio sistema descrevesse suas limitações. Dessa forma, sentenças como: “esta fórmula não é demonstrável” puderam ser tratadas como objetos da aritmética. Assim, a construção da proposição G que afirma: “A fórmula com número de Gödel sub (n, 13, n) é não-demonstrável” (Nagel e Newman, 1973, p. 79) torna-se possível. Por essa engenhosa articulação, Gödel reduziu a demonstrabilidade de uma fórmula a operações aritméticas sobre os expoentes do número de Gödel associado à sua prova.

5.4 Autorreferência no indecidível

A construção do indecidível como proposição autorreferente é fundante ao teorema da incompletude, pois explicita a lacuna entre verdade e demonstrabilidade. Como destaca Batistela (2017, p. 51), Gödel não apenas anteviu a sentença indecidível, mas criou um sistema para expressá-la semanticamente sem contradição.

Gödel transformou o Paradoxo de Richard em uma ferramenta válida de prova. A autorreferência que gera contradição em Richard foi contornada por Gödel pela aritmetização: a unicidade da codificação cardinal garantida pelo TFA que assegura que cada variação simbólica produza um número de Gödel distinto, transformando autorreferência da linguagem da metamatemática em operações com números.

A proposição G é construída pela substituição da variável por seu código numérico, como em sub(y,13,y), em que13 é o código gödeliano fixo para variáveis proposicionais (Nagel e Newman, 1973). Isso replica o paradoxo do mentiroso, mas como afirmação aritmética – possível porque ″a codificação permite a transição entre metamatemática e aritmética″ (Batistela, 2017, p. 40). O resultado é que G, ao declarar sua indemonstrabilidade, expõe um limite intrínseco: sistemas formais consistentes não podem capturar todas as verdades aritméticas que expressam. No paradoxo do mentiroso, a sentença refere-se a si mesma linguisticamente. Na demonstração, G refere-se a seu número de Gödel via operações aritméticas, disciplinando a autorreferência.

A aritmetização converteu a autorreferência em ferramenta da prova da incompletude do sistema. O sistema, por hipótese consistente, possui uma verdade que escapa à sua estrutura axiomática (Nagel e Newman, 1973, p. 57). Essa limitação é

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

incontornável e, mesmo acrescentando o indecidível como um axioma ulterior ao sistema, novas verdades indemonstráveis se manifestam.

6 Considerações finais

Ao longo desta pesquisa, buscamos responder à pergunta diretriz: "No teorema da incompletude de Gödel, que ideias fundantes são detectadas na abordagem adotada e na estratégia demonstrativa?" A investigação fenomenológica, seguindo o método proposto por Husserl e seus desdobramentos, permitiu-nos considerar que as ideias intuitivas detectadas na abordagem adotada e na estratégia mobilizada na demonstração do teorema da incompletude de Gödel são: i) a ideia platônica de que verdades matemáticas superam os sistemas formais; ii) a expertise de que a metamatemática poderia ser aritmetizada; e, iii) a percepção aguda de que os métodos finitários eram insuficientes para capturar a totalidade da verdade matemática. Essas três emergem de uma evidência eidética que antecede a formalização, revelando uma intencionalidade constitutiva voltada para as essências matemáticas.

Essas intuições materializam-se na estratégia mobilizada na demonstração, tais como: a bijeção metamatemática-aritmética; os números de Gödel; a codificação simbólica unívoca; e a autorreferência no indecidível. Essas operações garantem que operações metamatemáticas sejam traduzidas em operações aritméticas sem ambiguidades; a construção de sentenças autorreferenciais — ao contrário de Richard, Gödel não usa uma enumeração ordinal das definições, mas uma codificação cardinal baseada em primos, evitando autorreferências paradoxais; e a exibição sintática de proposições indecidíveis — transcendem o aspecto meramente operatório, revelando uma correlação noético-noemática entre o platonismo matemático subjacente e a formalização do resultado. A abordagem de Gödel não se limita a manipulações simbólicas; ela envolve uma intuição de essência sobre os limites intrínsecos dos sistemas formais, em que a autorreferência, longe de ser um obstáculo, torna-se o eixo que articula a relação entre verdade e demonstrabilidade.

As ideias intuitivas identificadas na demonstração revelam que a Matemática depende de evidências que transcendem a sintaxe, corroborando a crítica Husserliana ao formalismo: a Matemática, mesmo em sua formalização mais rigorosa, permanece aberta a verdades que transcendem seu próprio ferramental demonstrativo. Elas se revelaram como atos de consciência que captam a priori as estruturas invariantes da Matemática.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

A perspectiva realista de Gödel, fundada na intuição categorial de que verdades matemáticas possuem um estatuto ontológico independente, direcionou-o não apenas a limitar sistemas formais, mas a revelar objetivamente proposições além do alcance axiomático. Essa postura, radicalmente oposta ao finitismo hilbertiano, afirmava, na prática, o que Husserl teorizava: que a matematização formal não esgota o conteúdo ideal das verdades matemáticas, as quais se dão como essências intencionais anteriores e irredutíveis à sua captura demonstrativa.

A construção da proposição indecidível, que se vale da autorreferência para criar uma proposição que fale de si mesma, exibe a essência da incompletude, a diferença ontológica entre ser verdadeiro e ser demonstrável. A sentença indecidível materializa a intuição de que as verdades matemáticas transcendem qualquer sistema de formalização finita, como propunha o Projeto de Hilbert.

Disso, ousamos afirmar que o teorema da incompletude é mais que um resultado lógico formal: é uma realização técnica de uma intuição de essência em que a Matemática aparece como campo de idealidades que resiste à exaustão por sistemas simbólicos. Nesse aspecto, aproxima-se da concepção de Husserl, para quem as intuições de essência são unidades de sentido irredutíveis a seus exemplares concretos.

Este estudo não se dedicou diretamente a essa questão. No entanto, ficou evidente para nós que os passos que Gödel realiza na demonstração — o mapeamento da metamatemática na aritmética (via números primos), o isolamento da forma pura das relações lógicas e a suspensão de seu significado imediato — podem ser interpretados como um gesto análogo à *epoché* fenomenológica. O fracasso do Programa de Hilbert, na perspectiva Husserliana, após esta pesquisa, é entendido por nós como um erro de reduzir as idealidades matemáticas às suas expressões formais. A insistência de Hilbert em provas finitárias ignorava que a consistência, como noção metamatemática, pressupõe já uma intuição de essência do sentido dos símbolos — intuição de essência essa que Gödel soube articular ao expor os limites internos dos sistemas formais.

Apesar da predominância do paradigma formalista na comunidade matemática, que, como criticam Santos e Carvalho (2023), historicamente privilegia o analítico em detrimento das dimensões subjetivas, o teorema de Gödel revela a falácia dessa dicotomia: sua prova só se concretiza porque articula, de modo inseparável, intuições eidéticas e formalização rigorosa. A autorreferência, núcleo da demonstração, não é um artifício lógico, mas a articulação no plano categorial de uma intuição prévia sobre a transcendência das verdades matemáticas, exatamente o tipo de *insight* que educadores

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

matemáticos de orientação fenomenológica devem cultivar, tendo em vista que reconhecemos que toda formalização bem-sucedida pressupõe intuições constitutivas e que a Educação Matemática deve desenvolver não apenas habilidades demonstrativas, mas a capacidade de “ver essências” nos objetos ideais.

A crise dos fundamentos da Matemática do século XX, que levou Platão (século IV a.C.) e Kant (século XVIII) a serem revisitados nas propostas, ainda não foi resolvida e revela a tensão entre a matemática como verdade independente e como construção humana — tensão que permanece, embora com nuances mais sofisticadas. O que se constata é que a Matemática, mesmo sendo a ciência dos sistemas formais, não dispõe de um método que permita demonstrar todas as suas verdades, pois seus alicerces repousam em escolhas filosóficas não formalizáveis. Husserl, por meio da Fenomenologia, oferece uma resposta original a esse debate contemporâneo ao propor que ela emerge da intencionalidade da consciência: não como mera construção subjetiva, nem como realidade platônica independente, mas como idealidade objetiva constituída a partir da intuição de essências (*Wesensschau*).

Essa perspectiva transcende a dicotomia tradicional ao mostrar que a Matemática é descoberta em suas estruturas eidéticas (as essências matemáticas são apreendidas, não inventadas); contudo, é inventada em suas formalizações (os sistemas axiomáticos são construções históricas). Como Gödel demonstrou, sempre existirá um conjunto de verdades não demonstráveis, ou seja, um resíduo intuitivo irredutível a qualquer formalização completa.

Para a Educação Matemática, isso implica que superar as reduções formalistas, psicologistas ou estruturalistas exige compreender a Matemática como ciência da idealidade, na qual evidência intuitiva e rigor formal coexistem em tensão produtiva. Além disso, uma camada da realidade intencional, acessível pela *Wesensschau* Husserliana e materializada no teorema de Gödel, pode ser não apenas experienciada, mas também pedagogicamente cultivada, integrando intuição e formalização no ensino da Matemática como ciência viva.

Referências

ALES BELLO, A. **Husserl e as ciências**. Tradução de M. A. V. Bicudo; J. C. Bortolete; R. F. Batistela. São Paulo: Livraria da Física, 2022.

BARCO, A. Fenomenologia da Geometria. In: CONGRESSO DE FENOMENOLOGIA DA REGIÃO CENTRO-OESTE, 5., 2013, Goiânia. **Anais...** Goiânia: [s.n.], 2013. p. 1-10.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

BATISTELA, R. F. **O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática**. 2017, 140 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017.

BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V. Uma possibilidade de uma educação metamatemática trabalhando com o teorema da incompletude de Gödel. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 20, e023070, jan. 2023.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Filosofia da Educação Matemática**: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Editora UNESP, p. 23-48. 2010.

BORTOLETE, J. C. **O pensar algébrico**: uma perspectiva fenomenológica. 2024. 218 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2024.

DAVIS, M. What did Gödel believe and when did he believe it? **The Bulletin of Symbolic Logic**, New York, v. 11, n. 2, p. 194–206, jun. 2005.
DEPRAZ, N. **Compreender Husserl**. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2008.

FEFERMAN, S; DAWSON JR, J. W.; GOLDFARB, W.; PARSONS, C.; SOLOVAY, R. M. **Kurt Gödel - Collected works, v. 3**: Unpublished essays and lectures. Oxford: Oxford University Press, 1995.

FONSECA, R. V. **Teoria dos Números**. Belém: Editora da Universidade do Estado do Pará (UEPA), 2011.

FONTANA, V. F. Intuição de essências na Fenomenologia de Husserl. **Revista Faz Ciência**, Francisco Beltrão, v. 9, n. 9, p. 167-183, jan. 2007.

GÖDEL, K. Acerca das Proposições Formalmente Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos. In: LOURENÇO, M. (org.). **O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo**. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 1977. p. 245-290.

GRZIBOWSKI, S. Intuição e percepção em Husserl: leituras de Emmanuel Levinas. **Revista NUFEN**: phenomenology and interdisciplinarity, Belém, v. 8, n. 2, p. 65-76, ago. 2016.

HILBERT, D.; ACKERMANN, W. **Grundzuge der theoretischen Logik**. 5. ed. Berlin: Julius Springer, 1928.

HUSSERL, E. **A origem da Geometria**. Tradução de M. A. V. Bicudo. 1974.

HUSSERL, E. **Investigações lógicas**. Volume 1: Prolegômenos à Lógica Pura. Tradução de Pedro M. S. Alves. 2. ed. Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa, 2005.

HUSSERL, E. **Ideias para uma Fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica**. Tradução de Márcio Suzuki. Aparecida, SP: Idéias & Letras, 2006.

HUSSERL, E. **A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental**. Tradução de Diogo Falcão Ferrer. Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa, 2008.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. **A Prova de Gödel**. São Paulo: Perspectiva Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

ISSN 2525-8222
DOI: http://dx.doi.org/10.33361/RPQ.2025.v.13.n.37.1389

PEREIRA, R. H. de S. Intuições sensíveis em Kant: nem conceitualismo nem não-conceitualismo. **Manuscrito**: Revista Internacional de Filosofia, Campinas, v. 33, n. 2, p. 467-495, jul./dez. 2010.

SANTOS, A. M.; CARVALHO, H. M. A face extralógica do último Teorema de Fermat: um ensaio sobre a filosofia da prática matemática. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 20, e023078, jan. 2023.

SNAPPER, E. As Três Crises da Matemática: o Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo. Tradução de J. P. de Carvalho. **Humanidades**, Montes Claros, v. 2, n. 8, p. 85-93, jul./set. 1984.

SOARES, F. P. **As idealidades e a fenomenologia nas Investigações Lógicas de Husserl**. 2008. 158 f. Dissertação (Mestrado em Filosofia) – Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

TIESZEN, R. **Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics**. Cambridge: CUP, 2005.

Recebido em: 16 de maio de 2025.

Aceito em: 01 de setembro de 2025.